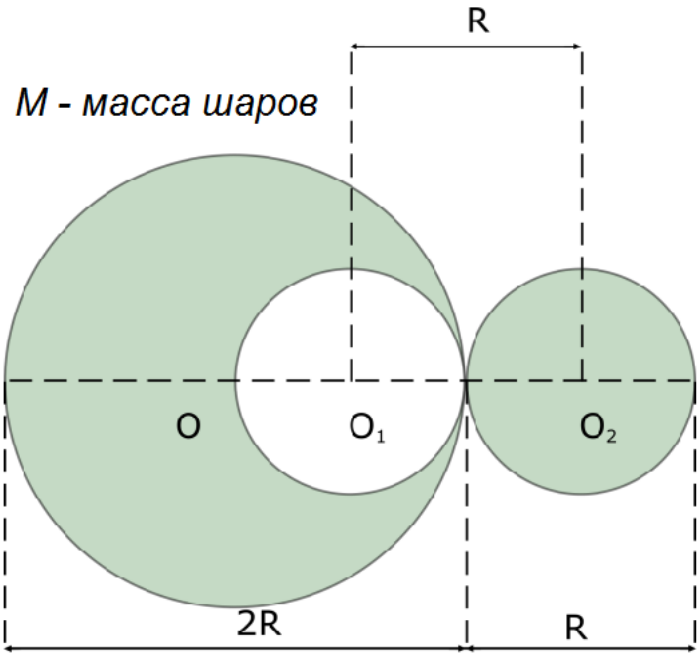
Ю.В.Ергин

ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ С РЕШЕНИЯМИ

Выпуск 2. Статика, динамика, закон всемирного тяготения



Ответ: $F_1 = G\frac{M}{R^2}\left(\frac{4}{9}M - \frac{M}{8}\right) = \frac{23}{216}\frac{GM^2}{R^2} \approx 0{,}04\frac{GM^2}{R^2}$

МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИЕТЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР» ГО г.УФА РБ

МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ШКОЛА № 45 С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ ОТДЕЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ» ГОРОДСКОГО ОКРУГА ГОРОД УФА РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

Ю.В.Ергин

ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ С РЕШЕНИЯМИ

Выпуск 2. Статика, динамика, закон всемирного тяготения

УФА - 2016

УДК 53 (075,3)
ББК 22.3Я721
Е69

Рекомендовано к изданию Экспертным советом
МБОУ ДО «НИМЦ» ГО г.Уфа РБ.
Протокол № 4 (99) от 16.03.2016 г.

Рецензенты:
д. ф.-м. наук, профессор М.А.Фатыхов
(БГПУ им.М.Акмуллы)
учитель высшей категории Г.Х.Равилова
(МАОУ гимназия № 47, г.Уфа)

Ергин Ю.В.
Е69 Физические задачи повышенной сложности с решениями.
Выпуск 2. Статика, динамика, закон всемирного тяготения./ Ю.В.Ергин. – Уфа: Изд. «Мир печати», 2016. – 56 с.

ISBN

Настоящий выпуск содержит 45 задач с решениями, которые могут быть использованы учащимися старших классов для подготовки к олимпиадам и сдаче Единого государственного экзамена (ЕГЭ).

УДК 53(075,3)
ББК 22.3Я721

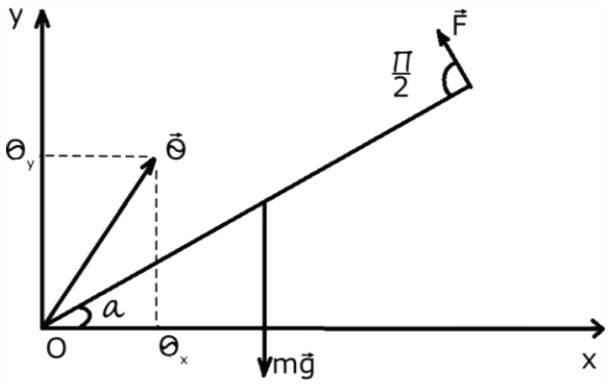
ISBN

© Ергин Ю.В., 2016
© Школа № 45 г.Уфа, 2016

Задача 1.

Столб массой m, упирающийся одним концом в прямой угол, равномерно поворачивается в вертикальное положение силой $\overline{F}$, приложенной ко второму концу столба перпендикулярно столбу. При этом значение силы $\left|\overline{F}\right|$ постепенно уменьшается до нуля.

Найти законы изменения силы F и реакции θ как функции угла α.



Выберем систему координат, показанную на рисунке. Поскольку столб поворачивается равномерно, можно применить условия равновесия.

Условие равенства нулю суммарного момента сил:

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - Fl = 0,$$

где l – длина столба.

Из этого уравнения получим:

$$F = \frac{mg\cos\alpha}{2},$$

т.е. сила F с ростом угла α уменьшается от $\frac{1}{2}$ до 0.

Запишем условие равенства нулю проекций на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\theta_x - F\sin a = 0$$
$$\theta_y - mg + F\cos a = 0$$

откуда:

$$\theta_y = mg\left[\frac{l - cos^2 a}{2}\right]$$
$$\theta_x = \frac{mg\sin 2a}{4}$$

поскольку $\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$, то окончательно имеем

$$\theta = \frac{mg}{2}\sqrt{l + 3sin^2 a}$$

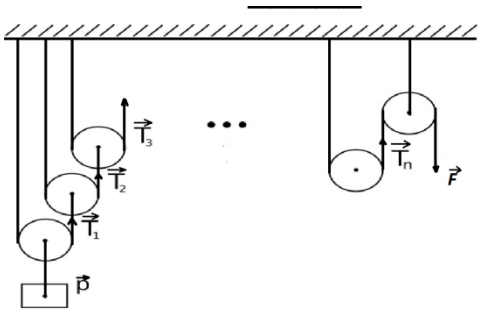
,

т.е. с увеличением угла α от 0 до $\frac{\pi}{2}$, реакция θ возрастает от $\frac{1}{2}mg$ до mg.

Задача 2.

Полиспаст – это грузоподъёмное устройство из нескольких подвижных и неподвижных блоков, огибаемых канатом или цепью, используемое в качестве рабочего органа грузоподъёмных машин (кранов, лебёдок). Вес поднимаемого груза с помощью полиспаста распределяется на несколько ветвей канаты, число которых зависит от числа блоков. Поэтому к тяговому концу каната прикладывается сравнительно малое усилие. Однако, давая выигрыш в силе, полиспаст уменьшает скорость движения груза.

Определить выигрыш в силе у полиспаста, состоящего из N подвижных блоков, если каждый из них имеет массу m. К первому блоку подвешен груз весом $\overline{P}$.



Из чертежа видно:

$$T_1 = \frac{P + mg}{2};$$

$$T_2 = \frac{\frac{P + mg}{2} + mg}{2} = \frac{P}{2^2} + \frac{mg(1+2)}{2^2};$$

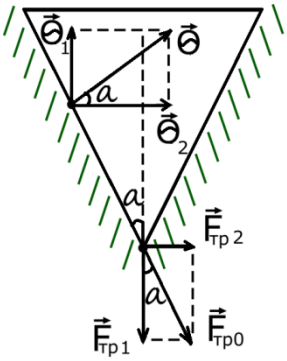
$$T_3 = \frac{P}{2^3} + mg\frac{1+2+2^2}{2^3};$$

Обобщая на случай N блоков, получим:

$$T_n = f = \frac{P}{2^n} + mg\frac{1+2+2^2+2^3+...+2^{n-1}}{2^n} = \frac{P+(2^n-1)mg}{2^n}$$

Задача 3.

Определить, каким должен быть коэффициент трения μ *для того, чтобы клин, заколоченный в бревно, не выскочил из него. Принять угол при вершине клина равным* α =30°



На одну грань клина в бревне действуют две силы:θ– сила реакции бревна и сила трения покоя $\overline{F}_{тр_0}$

Разложим их по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

$$\overline{\theta} = \overline{\theta}_1 + \overline{\theta}_2; \;\; \overline{F}_{тр_0} = \overline{F}_{тр_{01}} + \overline{F}_{тр_{02}}$$

Горизонтальные составляющие $\overline{\theta}_2$ и $\overline{F}_{тр_{02}}$ сил $\overline{\theta}$ и $\overline{F}_{тр_0}$ равны по модулю и противоположны по направлению горизонтальным составляющим $\overline{\theta}_2^{'}$ и $\overline{F}_{тр_2}^{'}$, действующим со стороны бревна на вторую грань клина: они попарно компенсируют друг друга.

Вертикальные составляющие $\overline{\theta}_1$ и $\overline{\theta}_1^{'}$, $\overline{F}_{тр_{01}}$ и $\overline{F}_{тр_{02}}$ складываются, так как имеют попарно одинаковое направление.

Клин не будет выскакивать из бревна при условии:

$$2\theta_1 = 2F_{\text{тр}0}; \theta_1 = F_{\text{тр}01}; \theta sin\frac{a}{2} = F_{\text{тр}0}cos\frac{a}{2}$$

;

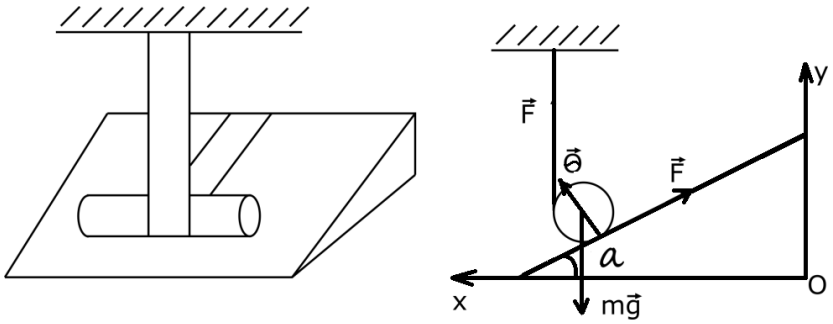
Отсюда имеем:

$$F_{\text{тр}0} = \theta tg\frac{a}{2} \leq F_{\text{тр}0}^{max} = \mu\theta$$

или $\mu \geq tg\frac{\alpha}{2}$. В нашем случае $\mu \geq tg\ 15^{\circ} \approx 0,268$.

Задача 4.

Цилиндр массой m удерживается на наклонной плоскости с углом наклона α лентой, закреплённой с одной стороны на наклонной плоскости, а с другой – направленной вертикально. Определить силу $\overline{F}$ натяжения ленты.



Выберем систему координат, показанную на рисунке, и изобразим все силы, действующие на цилиндр.

Первое условие равновесия цилиндра (в проекциях на оси Ox и Oy) запишется в виде:

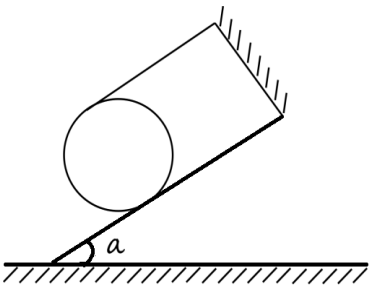
$$\Theta \sin\alpha - F\cos\alpha = 0,$$
$$\Theta\cos\alpha + F\sin\alpha + F - mg = 0$$

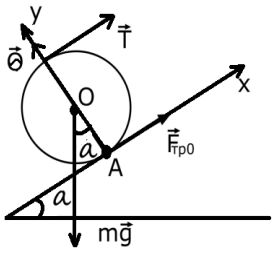
Совместное решение этих уравнений даёт выражение для силы натяжения ленты:

$$F = \frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

Задача 5.

На цилиндр намотана нить, один из концов которой прикреплён к стойке в верхней части наклонной плоскости так, как показано на рисунке. При каком угле α наклонной плоскости цилиндр не будет откатываться с неё, если коэффициент трения цилиндра о плоскость равен μ?





Запишем уравнение равновесия цилиндра в векторном виде:

$$\overline{\theta} + m\overline{g} + \overline{T} + \overline{F}_{mp_0} = 0,$$

где $\overline{\theta}$ - сила реакции наклонной плоскости,

$m\overline{g}$ - сила тяжести,

$\overline{T}$ - сила натяжения нити,

$\overline{F}_{mp_0}$ - сила трения покоя.

Из проекций этого уравнения на координатные оси найдём:

$$F_{mp_0} = mg\sin\alpha - T,$$

$$\theta = mg\cos\alpha$$

Запишем правило моментов относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс цилиндра (точка О):

$$TR = F_{mp_0}R,$$

где R – радиус цилиндра.

Отсюда: $F_{mp_0} = T, \quad F_{mp_0} = mg\sin\alpha - F_{mp_0}$, или $F_{mp_0} = \frac{1}{2}mg\sin\alpha$

Поскольку $F_{mp_0} \le F_{mp_0}^{\max} = \mu\theta = \mu mg\cos\alpha$, легко определить условие, при котором цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости:

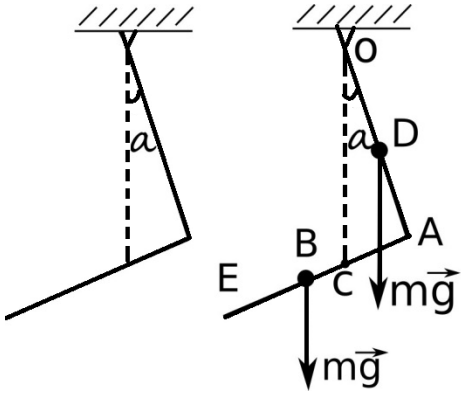
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \le 2\mu, \text{ или } tg\alpha \le 2\mu$$

Интервал значений угла α, при которых цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости:

$$\alpha \le arctg(2\mu)$$

Задача 6.

Проволока массой m изогнута так, что её части образуют прямой угол. Её подвесили за один из концов на шарнире. Определить угол α, который образует проволока с вертикалью в положении равновесия.



Пусть $\frac{l}{2}$ = OA = AE – длина половины проволоки, $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$ – масса половины проволоки, D – центр масс верхней части, B – нижней части, а C – всей проволоки.

Проволока будет в равновесии, когда алгебраическая сумма сил тяжести $m_1\bar{g}$ и $m_2\bar{g}$ относительно точки O, совпадающей с шарниром, будет равна нулю.

Из чертежа: $|OD| = \frac{l}{4} = |AB|$; $|BC| = |AB| - |AC| = \frac{l}{4} - \frac{l}{2}tg\alpha$

Нетрудно видеть, что:

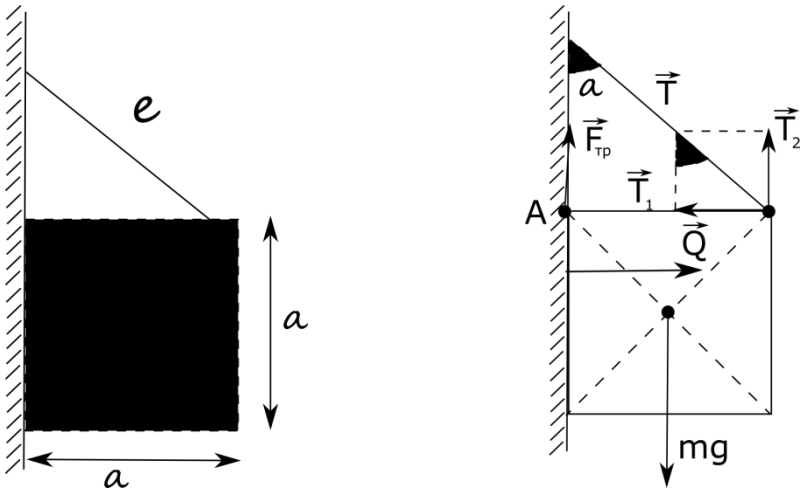
$m_1 g\frac{l}{4}\sin\alpha = m_2\frac{l}{4}(1-2tg\alpha)\cos\alpha$ или $\frac{m}{2}\sin\alpha = \frac{m}{2}(1-2tg\alpha)\cos\alpha$, откуда $tg\alpha = \frac{1}{3}$

Таким образом, искомый угол, который образует с вертикалью верхняя часть проволоки в положении равновесия:

$$\alpha = arctg\frac{1}{3} \approx 18{,}4^\circ$$

Задача 7.

Какой длинный l нужно взять нить, чтобы подвесить на ней у стены кубик со стороной a так, как показано на рисунке? Принять коэффициент трения между стеной и кубиком равным μ.



Запишем уравнение равновесия кубика в векторном виде и в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$\bar{\theta} + \bar{T} + \bar{F}_{тр_0} + m\bar{g} = 0,$$

где $\bar{T}$ - сила натяжения нити,

$\bar{F}_{тр_0}$ - сила трения покоя,

$m\bar{g}$ - сила тяжести,

$\bar{\theta}$ - реакция стены.

$$\begin{cases} F_{mp_0} + T_2 - mg = 0, \\ \theta - T_1 = 0 \end{cases}$$

где $\overline{T_1}$ и $\overline{T_2}$ - горизонтальная и вертикальная составляющие силы $\overline{T}$ натяжения нити.

Нетрудно видеть, что:

$$F_{mp_0} = mg - T_2 \le F_{mp_0}^{\max} = \mu\theta = \mu T_1,$$

$$T_1 = T_2 tg\alpha \ ; \quad mg - T_2 \le \mu T_2 tg\alpha$$

$$\text{или } mg \le (\mu tg\alpha + 1)T_2$$

В предельном случае сил реакции стены $\overline{\theta}$ будет действовать на верхнее ребро кубика, перпендикулярное плоскости рисунка (точка А).

Запишем правило моментов относительно точки А:

$$mg\frac{a}{2} = T_2 a, \text{ откуда } T_2 = \frac{mg}{2}$$

Момент составляющей силы упругости нити $\overline{T_1}$ относительно указанной точки, так же как и моменты сил θ и $\overline{F}_{mp_0}$ относительно её, равны нулю.

Отсюда имеем:

$$mg \le (\mu tg\alpha + 1)\frac{mg}{2} \text{ или } tg\alpha \ge \frac{1}{\mu}$$

Минимальное значение угла α, равное $\alpha_{\min} = arctg\frac{1}{\mu}$ соответствует максимальному значению длины нити:

$$l_{\max} = \frac{a}{\sin\alpha_{\min}}, \text{ откуда: } \sin\alpha_{\min} = \frac{tg\alpha_{\min}}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_{\min}}} = \frac{1/\mu}{\sqrt{1 + \left(1/\mu\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

При $\alpha = \alpha_{\min}$ длина нити будет минимальной: $l_{\min} = \frac{a}{\sin\alpha_{\max}} = a$,

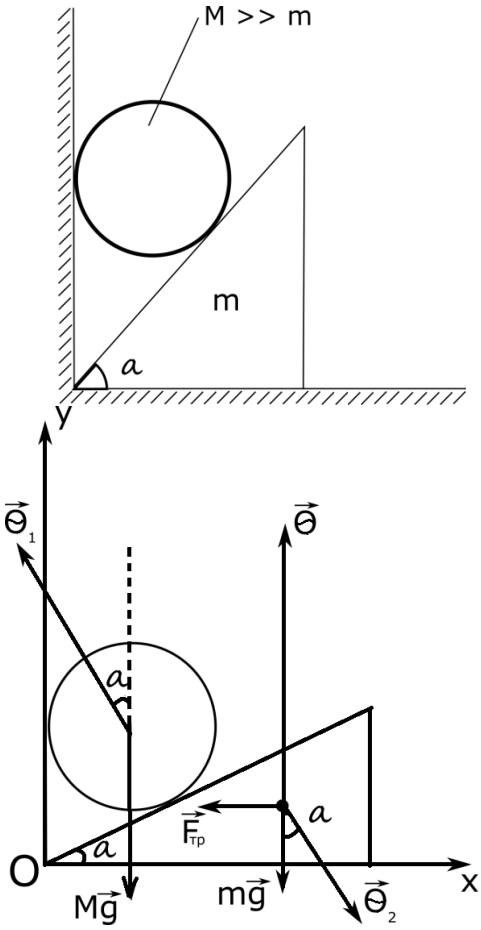
поскольку $\sin\alpha_{\max} = 1$ при $\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2}$

Таким образом, длины нити, удерживающей куб, лежит в пределах:

$$a \le l \le a\sqrt{1+\mu^2}$$

Задача 8.

На горизонтальном полу лежит клин массой m, вершина которого касается вертикальной стенки. Сверху на клин положили бревно массой M, причём M >> m. При каком угле α клин не сдвинется с места, если коэффициент трения клина о пол равен μ, а трение бревна о стенку и о клин пренебрежительно мало.



Обозначим все силы, действующие на бревно и на клин.

$M\overline{g}$ – силы тяжести бревна,

$\overline{\theta}_1$ – сила реакции опоры, действующая со стороны клина,

$m\overline{g}$ – сила тяжести клина,

$\overline{\theta}$ – нормальная реакция опоры, действующая на клин,

$\overline{\theta}_2$ – сила, действующая на клин со стороны бревна.

$\overline{F}_{тр}$ – сила трения между клином и столом.

По третьему закону Ньютона: $\left|\overline{\theta}_1\right| = \left|\overline{\theta}_2\right|$

Запишем условия равновесия клина и бревна в проекция на оси Ох и Оу:

Клин: $0 = \theta_2 \sin\alpha - F_{тр}$;

$0 = \theta - mg - \theta_2 \cos\alpha$;

Бревно: $0 = \theta_2 \cos\alpha - Mg$

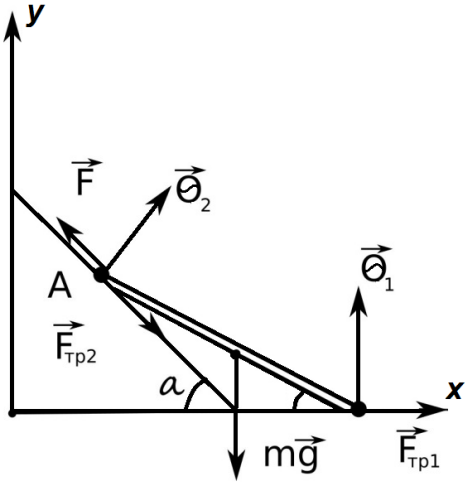
С учётом того, что $F_{тр} = \theta_2 \sin\alpha \le \mu\theta$, имеем:

$$tg\alpha \le \mu\left(\frac{m}{M} + 1\right)$$

По условию задачи $\frac{m}{M} << 1$, поэтому $tg\alpha \le \mu$ - это условие того, что ни клин, ни бревно с места не сдвинутся.

Задача 9.

Из ямы с помощью настила, наклонённого под углом $\alpha = 38^\circ$, и блока вытаскивают бревно массой m=10 кг. В некоторый момент бревно составляет с горизонтом угол y= 20° Коэффициент трения между бревном и землей $\mu_1 = 0{,}5$, а между бревном и настилом $\mu_2 = 0{,}1$. Пренебрегая трением в блоке и толщиной бревна, определите силу $\overline{F}$ натяжения верёвки и силы $F_{давл_1}$ и $F_{давл_2}$ бревна на землю и на настил.



Силы, действующие на бревно:

$m\overline{g}$ – сила тяжести, приложена к середине бревна, направлена вертикально вниз,

$\overline{\theta}_1$ – сила реакции опоры со стороны земли,

$\overline{F}_{тр_1}$ - сила трения, препятствующая скольжению бревна по земле,

$\overline{\theta}_2$ – сила реакции со стороны настила,

$\overline{F}_{тр_2}$ - сила трения, препятствующая скольжению по настилу,

$\overline{F}$ – сила натяжения каната.

Очевидно, что

$$\left|\overline{F}_{давл_1}\right| = \left|\overline{\theta}_1\right| \text{ и } \left|\overline{F}_{давл_2}\right| = \left|\overline{\theta}_2\right|$$

Поэтому:

$$F_{тр_1} = \mu_1\theta_1$$

$$F_{тр_2} = \mu_2\theta_2$$

Для того, чтобы тело не участвовало в поступательном ускоренном движении, сумма всех сил, действующих на тело, должна быть равна нулю.

В проекциях по оси Ox и Oy:

$$\sum F_x = 0; \quad -F\cos\alpha + \theta_2\sin\alpha + \mu_2\theta_2\cos\alpha + \mu_1\theta_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0; \quad F\sin\alpha + \theta_2\cos\alpha - \mu_2\theta_2\sin\alpha - mg + \theta_2 = 0 \qquad (2)$$

Чтобы тело не участвовало во вращательном движении, необходимо, чтобы сумма моментов относительно любой произвольной оси равнялась нулю.

Удобнее выбрать ось вращения, проходящую через точку A: если l – длина бревна, то:

$$\sum M_z = 0; \quad mg\frac{l}{2}\cos y - \theta_1 l\cos y - \mu_1\theta_1\sin y = 0 \qquad (3)$$

Из совместного решения (1), (2) и (3) найдём силы F, θ_1 и θ_2.

Из (3) находим:

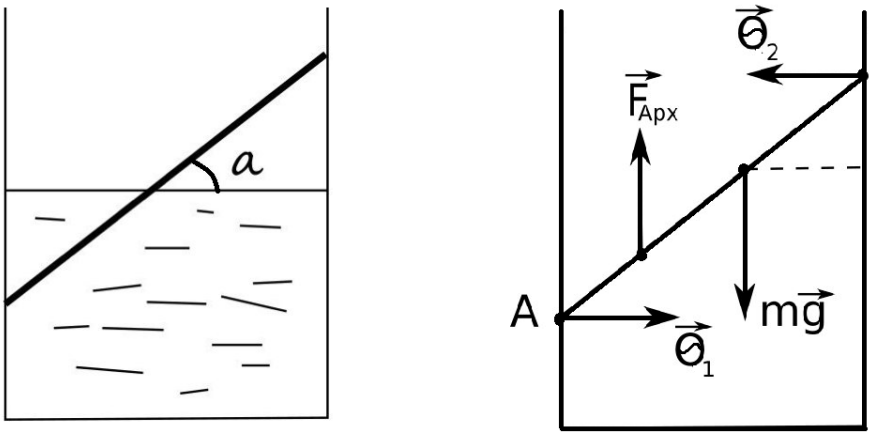
$$\theta_1 = \frac{mg}{2(1+\mu_1 tg\, y)} = 225H$$

Из (1) и (2) находим:

$$\theta_2 = 555H \text{ и } F = 535H$$

Задача 10.

С какой силой на стену цилиндрического стакана давит палочка массой m, наполовину погружённая в воду? Угол наклона палочки к горизонту равен α, трением пренебречь.



На погружённую в воду часть палочки действует сила Архимеда $\overline{F}_{арх}$, равная весу вытесненной воды, приложенная к центру масс вытесненного объёма.

На чертеже:

$\overline{\theta}_1$ и $\overline{\theta}_2$ - силы реакции стенок стакана,

$m\overline{g}$ - вес палочки.

$\left|\overline{F}_{арх}\right| = \rho\frac{V}{2}g$, где ρ - плотность воды, V – объём палочки.

Уравнения равновесия палочки в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$0 = \theta_1 - \theta_2,$$

$$0 = F_{арх} - mg$$

Добавим к ним правило моментов всех сил, действующих на палочку, относительно горизонтальной оси, проходящей через точку касания нижнего конца палочки со стаканом (точка А):

$$0 = mg\frac{l}{2}\cos\alpha - F_{арх}\frac{l}{4}\cos\alpha - \theta_2 l\sin\alpha,$$

где l – длина палочки.

Легко видеть, что:

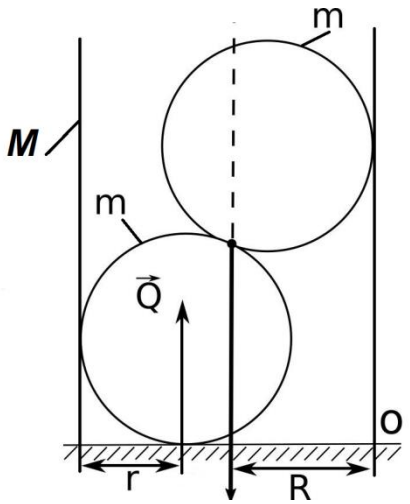
$\theta_1 - \theta_2 = \frac{mg}{4}ctg\alpha$ - сила реакции на палочку со стороны стакана.

Используем 3 закон Ньютона и найдём для сил давления палочки на стенки стакана:

$$F_{давл_1} = F_{давл_2} = \frac{mg}{4}ctg\alpha$$

Задача 11.

Два одинаковых шара радиусами R = 10 см и массами m = 600 г каждый положили в вертикальный, открытый с обеих сторон, тонкостенный цилиндр радиусом R = 15 см, стоящий на горизонтальной плоскости. Пренебрегая трением, определить, при какой наименьшей массе M цилиндра шары его не опрокинут.



Если цилиндр находится на грани опрокидывания, то он взаимодействует с плоскостью только в точке О.

Если начать решение задачи с написания уравнений моментов для цилиндра, то придётся ввести и вычислить силы давления шаров на его стенки, а для этого нужно будет записать и уравнение моментов для верхнего шара.

Предлагаем учащемуся провести такого рода расчёты, а мы покажем, как удачный выбор объекта для записи условий равновесия может значительно упростить решение задачи.

Исследуем равновесие системы <цилиндр-шары> и запишем уравнение моментов относительно точки О. Поскольку взаимодействия шаров с цилиндром и между собой являются внутренними, их учитывать не надо:

$$\theta(2R-2)-(M+2m)gR=0$$

Силу реакции $\overline{\theta}$ плоскости найдём из первого условия равновесия для системы из двух шаров (в проекции на вертикальную ось):

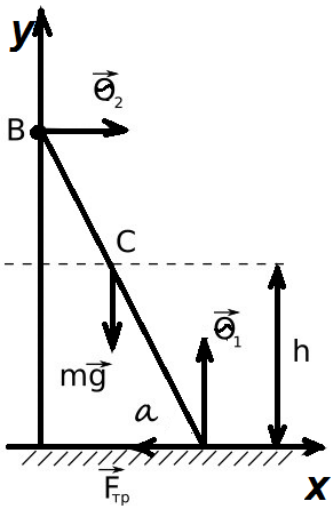
$$\theta-2mg=0$$

Совместное решение уравнений даёт:

$$M=\frac{2m(R-2)}{R}=400г$$

Задача 12.

Лестница длиной l = 4 м приставлена к гладкой стене под углом α = 60° к полу. Максимальная сила трения между лестницей и полом $F_{тр_0}^{max}$ = 200 Н. На какую высоту h может подняться по лестнице человек массой m = 60 кг, прежде чем лестница, массой которой можно пренебречь, начнёт скользить?



Запишем уравнение равновесия лестницы в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$\begin{cases} 0 = \theta_2 - F_{mp_0}, \\ 0 = \theta_1 - mg, \end{cases}$$

откуда $\begin{matrix} \theta_1 = mg \\ \theta_2 = F_{mp_0} \le F_{mp_0}^{\max} \end{matrix}$

Запишем правило моментов, действующих на лестницу сил относительно точки А:

$$mgX\cos\alpha = \theta_2 l\sin\alpha,$$

где $X\cos\alpha$ - плечо силы $m\bar{g}$,

$l\sin\alpha$ - плечо силы θ_2

$X = |AC|$ - расстояние от нижней точки лестницы до точки С, в которой находится человек.

Поскольку $\theta_2 = F_{mp_0}^{\max}$, имеем:

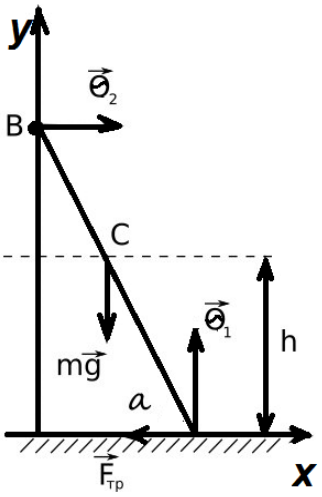
$$mgX = F_{mp_0}^{\max} l tg\alpha$$

Поскольку $h = X\sin\alpha$ - максимальная высота подъёма человека:

$$h = \frac{F_{mp_0}^{\max} l\, tg\alpha \sin\alpha}{mg} = 2м$$

Задача 13.

Лестница длиной l = 4м приставлена к гладкой стене под углом α = 60° к горизонту. Коэффициент трения между лестницей и полом μ = 0,25. На какое расстояние X вдоль лестницы может подняться человек, прежде чем лестница начнёт скользить? Массой лестницы пренебречь.



Условие начала проскальзывания нижнего конца лестницы

$$F_{mp} = \mu\theta_1$$

Искомое расстояние X может войти только в уравнение моментов: выберем ось вращения лестницы в точке О: сил будет меньше, а … проще:

$$\theta_1 l\sin\alpha - mgX\cos\alpha = 0$$

Для исключения всех неизвестных сил запишем первое условие равновесия в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\theta_2 - F_{mp} = 0,$$

$$\theta_1 - mg = 0$$

Совместное решение уравнений даёт: $X = \mu l\, tg\alpha = 1{,}2м$

Замечание:

Обратим внимание на то, что при специальном выборе оси вращения лестницы вместо трёх предыдущих уравнений можно обойтись одним уравнением моментов. Действительно, если второе условие равновесия записать относительно оси (точки O_1), то силы $\overline{Q_1}$ и $m\overline{g}$ будут исключены:

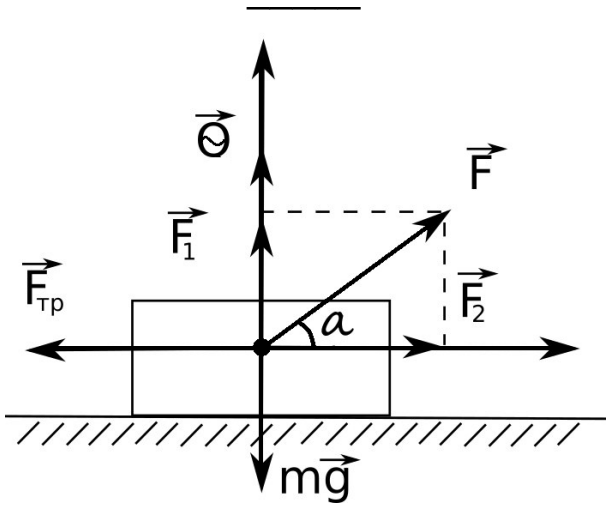
$$F_{тр}\, l \sin\alpha - \theta_1 X \cos\alpha = 0$$

Подставляя в это уравнение соотношение $F_{тр} = \mu\theta_1$, приходим сразу к выражению:

$$X = \mu l tg\alpha$$

Задача 14.

Определить величину силы $\overline{F}$, которую необходимо приложить к телу массой m=60кг, чтобы с постоянной скоростью перемещать его по горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между телом и поверхностью $\mu = 0{,}22кг$, угол $\alpha = 30^\circ$.



Запишем условие равномерного прямолинейного движения тела по горизонтальной плоскости:

$$m\overline{g} + \overline{F} + \overline{F}_{тр} + \overline{\theta} = 0,$$

где $F_{тр}$ - сила трения скольжения тела о поверхность, $\overline{\theta}$ - реакция опоры.

Спроектируем это уравнение на оси X и Y:

$$\begin{cases} 0 = F_2 - F_{тр}, \\ 0 = \theta + F_1 - mg \end{cases}$$

С учётом того, что $F_1 = F_{\cos\alpha}$, $F_2 = F_{тр} = \mu\theta$, получим:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 158{,}6H$$

Из этого соотношения можно определить минимальное значение угла α, при котором при равномерном перемещении груза сила $\overline{F}$ будет минимальной.

Перепишем предыдущее выражение для силы F в виде:

$$F = \frac{\mu mg}{1\cdot\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{1+\mu^2\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\alpha + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin\alpha\right)}} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}\cos(\alpha - y)},$$

где $\sin y = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $tg\, y = \frac{\sin y}{\cos y} = \mu$, $y = arctg\,\mu$ - вспомогательный угол.

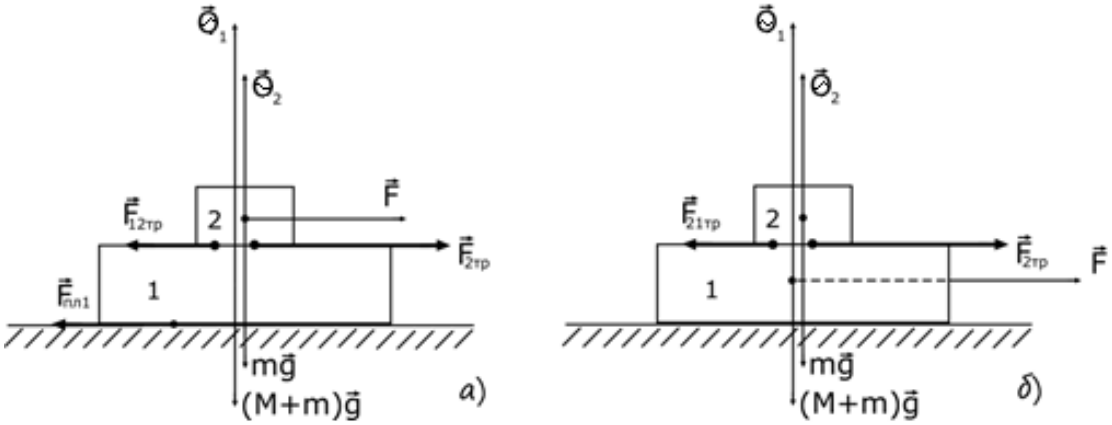
Сила $F = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}\cos(\alpha - y)}$ будет иметь наименьшее значение при условии $\cos(\alpha - y) = 1$, или $\alpha = y = arctg\,\mu$.

Таким образом, минимальное значение силы F, направление которой составляет угол $\alpha = arctg\,\mu$ с горизонтом, равно:

$$F_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

Задача 15.

Маленькие шарики (N – их число), каждый из которых имеет массу m, тянут по горизонтальной поверхности равномерно с силой F, направленной горизонтально. Коэффициент трения между шариками и плоскостью равен μ. Шарики соединены между собой лёгкими (невесомыми) пружинами, имеющими в свободном состоянии длину l. Полагая, что жёсткость каждой пружины k, определить расстояние между крайними шариками при движении системы.



Рассмотрим условия равномерного движения первого и второго шариков, если внешняя сила приложена к N-му шарику:

$$0 = \overline{F}_{упр1} + \overline{F}_{тр} + \overline{\theta} + m\overline{g}\,, \qquad (1)$$

где $F_{упр1}$ - сила упругости пружины, соединяющей первый и второй шарики,

$F_{тр}$ - сила трения скольжения,

$m\overline{g}$ - вес шарика.

$$0 = \overline{F}'_{упр1} + \overline{F}_{тр} + \overline{F}_{упр2} + \overline{\theta} + m\overline{g}\,, \qquad (2)$$

где $\overline{F}'_{упр1} = -\overline{F}_{упр1}$, $\left(F_{упр1} = F'_{упр}\right)$ - сила упругости, действующая на второй шарик со стороны пружины, связывающей его с первым шариком,

$\overline{F}_{упр2}$ - сила упругости, действующая на второй шарик со стороны пружины, связывающей его с третьим шариком.

Запишем уравнение (1) в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления.

$$\begin{cases} 0 = F_{упр1} - F_{тр}, \\ 0 = \theta - mg, \end{cases}$$

откуда $F_{упр1} = \mu mg,\ x_1 = \dfrac{\mu mg}{k}$ - удлинение пружины, связывающей первый и второй шарики.

Уравнение (2) в проекции на горизонтальное и вертикальное направления:

$$\begin{cases} 0 = F_{упр_2} - F'_{упр_1} - F_{тр}, \\ 0 = \theta - mg \end{cases}$$

Отсюда имеем: $F_{упр_2} - F'_{упр_1} = 2F_{тр}, \quad \theta = mg, \quad F'_{упр_1} = F_{упр} = F_{тр}, \quad F_{упр_2} = 2\mu mg$

Поскольку $k\,x_2 = 2\mu mg$, имеем для уравнения 2-ой пружины:

$$x_2 = \frac{2\mu mg}{k}$$

Обобщая полученный результат, для удлинения N-ой пружины:

$$x_N = \frac{N\mu mg}{k}$$

Учтём, что число пружин на единицу меньше числа шариков (возьмём, например, три шарика, которые связаны пружинами), то есть $n_{\max} = N - 1$.

Удлинение всех пружин, связывающих шарики, составит:

$$\Delta x = x_1 + x_2 + ... + x_{n_{\max}} = \frac{\mu mg}{k} + \frac{2\mu mg}{k} + ... + \frac{(N-1)\mu mg}{k} = \frac{\mu mg}{k}\left[1 + 2 + ... + (N-1)\right]$$

В квадратных скобках арифметическая прогрессия – сумма всех натуральных чисел от 1 до (N-1). Сумма членов этой прогрессии:

$$S = \frac{1 + (N-1)}{2}(N-1) = \frac{N}{2}(N-1)$$

Поэтому удлинение всех пружин: $\Delta x = \dfrac{\mu mgN(N-1)}{2k}$

Тогда, полагая, что суммарная длина недеформированных пружин $l_0 = (N-1)l$, определим суммарную длину деформированных пружин:

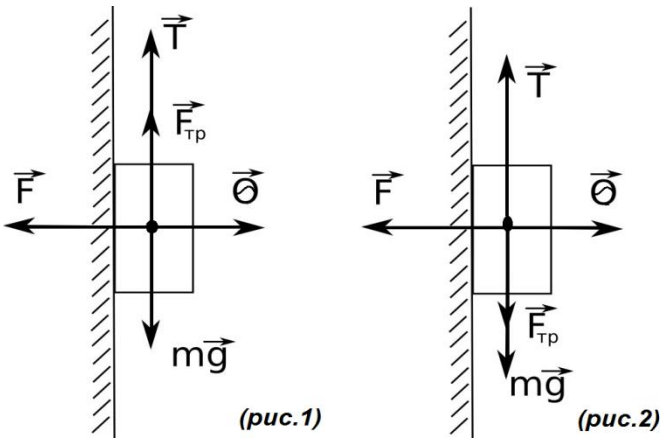
$$L = (N-1)l + \frac{\mu mgN(N-1)}{2k}$$

Таким образом, искомое расстояние между крайними шариками:

$$L = \left(l + \frac{\mu mgN}{2k}\right)(N-1)$$

Задача 16.

Груз массой m=50 кг прижат силой F=118Н к вертикальной стене. Какую минимальную силу $T_{\min}$ необходимо приложить к грузу, чтобы удержать его в покое? Что будет происходить с грузом, если в вертикальном направлении приложить силу: а) 460Н; б)490Н? Какова будет при этом сила трения? Коэффициент трения скольжения груза по стене μ =0,3.



Запишем условие равновесия груза в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления (рис.1):

$$\begin{cases} 0 = T + F_{тр_0} - mg, \\ 0 = \theta - F \end{cases} \qquad (1)$$

Откуда имеем: $F_{тр_0} = mg - T \le F_{тр_0}^{\max} = \mu\theta = \mu F$,

где $\overline{T}$ - искомая сила,

$\overline{F}$ - сила, прижимающая груз к стенке,

$\overline{F}_{тр_0}$ - сила трения покоя,

$\overline{\theta}$ - реакция стены.

Нетрудно видеть, что из (1) следует: $T \geq mg - \mu F$

$T_{\min} = mg - \mu F = 454{,}6H$ - минимальное значение силы F.

Если груз движется по стене равномерно вверх, изменится направление силы трения: теперь это сила трения скольжения, направленная против движения груза (рис.2).

В этом случае:

$$\begin{cases} T - F_{тр} - mg, \\ F_{тр} = \mu\theta, \end{cases} \qquad (2)$$

откуда $T = \mu F + mg = 525{,}4H$

Если на груз действует в вертикальном направлении сила $T_1 = 460H$, то сила тяжести $m\bar{g}$, действующая противоположно силе T_1, равна по модулю $|m\bar{g}| = 490H$.

Поэтому равнодействующая сил $m\bar{g}$ и $\bar{T}_1$ направлена вниз и равна $F^* = 30H$.

Попытка сдвинуть груз вниз приведёт к возникновению силы трения покоя $\bar{F}_{тр_0}$, направленной вверх противоположно силе F^*.

Минимальное значение силы трения покоя составит величину:

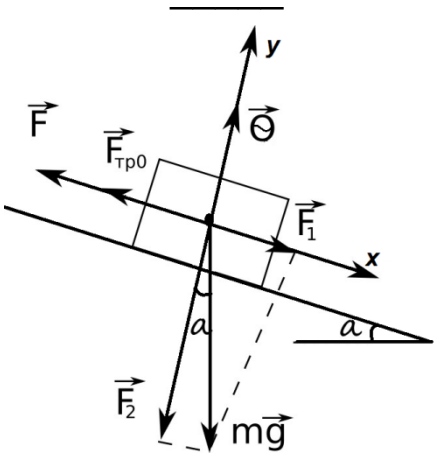
$$F_{тр_0}^{\max} = \mu F = 35{,}4H$$

Это означает, что сила трения покоя $\bar{F}_{тр_0}$ компенсируется силой $\bar{F}^*$ и груз будет на вертикальной стенке покоиться.

Равнодействующая сила $T_2 = 490H$ и $mg = 490H$ равна нулю: в этом случае груз будет покоиться на вертикальной стене. Сила трения покоя при этом не возникнет: $F_{тр_0} = 0$.

Задача 17.

Какой груз можно удержать на наклонной плоскости l=1м и высотой h=0,5м силой F=49Н, направленной параллельно наклонной плоскости, если коэффициент трения равен μ =0,4? Как изменится ответ, если силу приложить перпендикулярно наклонной плоскости?



Уравнение равновесия груза:

$$0 = \bar{F} + \bar{F}_{тр_0} + m\bar{g} + \bar{\theta}, \qquad (1)$$

где $\bar{F}$ - удерживающая сила,

$\bar{F}_{тр_0}$ - сила трения покоя,

$\bar{\theta}$ - реакция наклонной плоскости.

Запишем (1) в проекциях на оси X и Y:

$$\begin{cases} 0 = F_1 - F - F_{тр} \\ 0 = \theta - F_2, \end{cases} \qquad (1)$$

где $F_1 = mg\sin\alpha$ и $F_2 = mg\cos\alpha$ - модули составляющих $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ силы $m\overline{g}$ вдоль координатных осей.

Поскольку $F_{mp_0} \le F_{mp_0}^{\max} = \mu\theta$, легко из (1) получить:

$$mg \le \frac{F}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}, \text{ где } \sin\alpha = \frac{h}{l}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}.$$

Отсюда, для максимального значения веса груза, удерживаемого силой $\overline{F}$, параллельной наклонной плоскости (h – высота, l – длина) получим:

$$(mg)_{\max} = \frac{Fl}{h - \mu\sqrt{l^2 - h^2}} = 319H$$

Рассмотрим случай, когда сила $\overline{F}$ перпендикулярна наклонной плоскости. В этом случае сила $\overline{F}$ будет совпадать по направлению с составляющей $\overline{F_2}$ силы тяжести $m\overline{g}$.

Запишем уравнение равновесия удерживаемого груза в проекциях на оси X и Y:

$$\begin{cases} 0 = F_1 - F_{mp_0}, \\ 0 = \theta - F_2 - F \end{cases} \qquad (2)$$

С учётом того, что $F_{mp_0} = F_1 = mg\sin\alpha \le F_{mp_0}^{\max} = \mu\theta$, имеем:

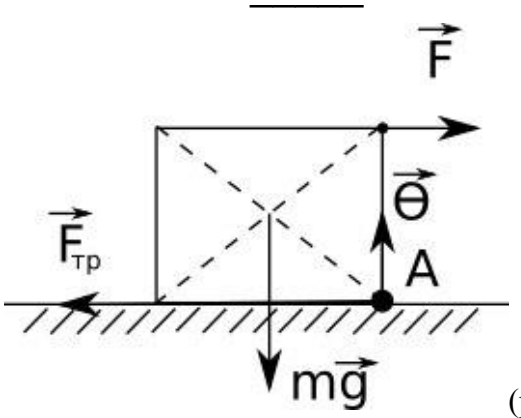
$$mg \le \frac{\mu F}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}$$

Тогда максимальный вес $(mg)_{\max}$ удерживаемого в этом случае тела:

$$(mg)_{\max} = \frac{\mu Fl}{h - \mu\sqrt{l^2 - h^2}} = 122{,}6H$$

Задача 18.

Куб массой m стоит на горизонтальной плоскости. С какой минимальной силой $\overline{F}$ нужно тянуть куб за верхнее ребро, чтобы он начал опрокидываться без проскальзывания, если коэффициент трения куба о плоскость равен μ?



(рис. 1)

Пусть a – сторона куба. Сначала выясним, при каких значениях коэффициента трения μ куб опрокинется силой $\overline{F}$, направленной горизонтально (рис.1).

В предельном случае опрокидывания куба вокруг своего нижнего ребра (точка А):

$$mg\frac{a}{2} \le F_a, \text{ откуда } F \ge \frac{mg}{2}$$

В этом случае минимальное значение силы для опрокидывания куба:

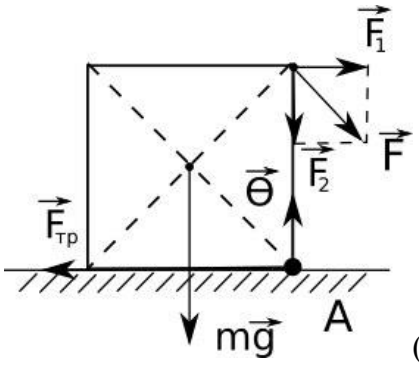
$$F_{\min} = \frac{mg}{2}$$

Запишем уравнение равновесия куба в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} 0 = F_{\min} - F_{mp_0}, \\ 0 = \theta - mg \end{cases} \qquad (1)$$

Поскольку $F_{mp_0} = F_{\min} = \dfrac{mg}{2} \le F_{mp}^{\max}$, легко найти, что $\mu \ge \dfrac{1}{2}$

Теперь рассмотрим случай, когда угол $\alpha \ne 0$ и $\mu < \dfrac{1}{2}$



(рис.2).

Уравнение равновесия куба в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$\begin{cases} 0 = F_1 - F_{mp_0}, \\ 0 = \theta - mg - F_2, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ - составляющие силы $\overline{F}$ вдоль горизонтального и вертикального направления. Нетрудно видеть, что:

$$F_{mp_0} \le F_{mp_0}^{\min} = \mu\theta, \qquad F\cos\alpha \le \mu(mg + F\sin\alpha)$$

Добавим к (2) правило моментов всех сил относительно точки А:

$$F_1 a > \mathrm{mg}\frac{\mathrm{a}}{2}, \qquad F\cos\alpha \ge \frac{mg}{2}$$

Теперь легко получить

$$\frac{mg}{2} \le \mu(mg + F\sin\alpha) = \mu mg + \mu F\sin\alpha,$$

откуда:

$$F\sin\alpha \ge \frac{mg(1-2\mu)}{2\mu}$$

Таким образом, получена система неравенств:

$$\begin{cases} F\sin\alpha \ge \dfrac{mg(1-2\mu)}{2\mu} \\ F\cos\alpha \ge \dfrac{mg}{2} \end{cases} \qquad (3)$$

Началу опрокидывания куба соответствует знак равенства в обоих неравенствах:

$$\begin{aligned} F_{\min}\sin\alpha &= \frac{mg(1-2\mu)}{2\mu}, \\ F_{\min}\cos\alpha &= \frac{mg}{2}, \end{aligned} \qquad (4)$$

откуда $tg\alpha = \dfrac{1-2\mu}{\mu}$ или $\alpha = arctg\dfrac{1-2\mu}{\mu}$

Вернёмся к первому уравнению в (4):

$$F_{\min}\sin\alpha = \frac{mg(1-2\mu)}{2\mu}, \text{ откуда } F_{\min} = \frac{mg(1-2\mu)}{2\mu\sin\alpha}$$

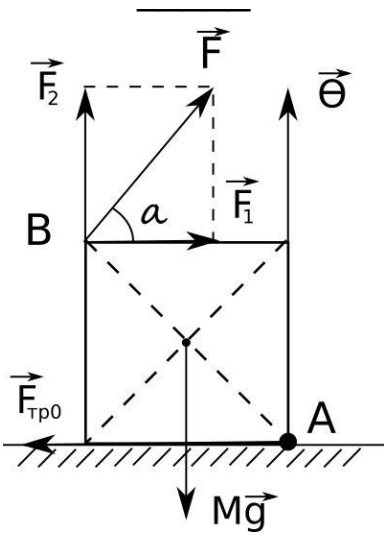
Поскольку $\sin\alpha = \dfrac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{1-2\mu}{\mu\sqrt{1+\left(\dfrac{1-2\mu}{\mu}\right)^2}} = \dfrac{1-2\mu}{\sqrt{5\mu^2-4\mu+1}}$

Тогда определится выражение для минимального значения силы $\overline{F}$, направленной под углом $\alpha = arctg\dfrac{1-2\mu}{\mu}$ к горизонту в случае $\mu < \dfrac{1}{2}$ в виде:

$$F_{\min} = \frac{mg\sqrt{5\mu^2-4\mu+1}}{2\mu}$$

Задача 19.

Определить минимальную силу $\overline{F}_{\min}$, которой можно опрокинуть через ребро куб, лежащий на наклонной плоскости. Каков должен быть при этом минимальный коэффициент трения $\mu_{\min}$ куба о плоскости, если масса куба равна М?



Минимальное значение силы $\overline{F}$ будет в случае, когда её плечо относительно оси вращения будет максимальным. Пусть ось вращения проходит через нижнее ребро куба (точка А). Тогда максимальным плечом силы $\overline{F}$ будет диагональ куба ($AB = a\sqrt{2}$, где a – ребро куба). Сила $\overline{F}$ должна быть приложена к верхнему ребру (точка В) и направлена перпендикулярно диагональному сечения ребра: очевидно, что в этом случае угол $\alpha = 45^\circ$

Первое условие равновесия куба в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления:

$$\overline{\theta} + \overline{F}_2 + M\overline{g} = 0,$$

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_{mp_0} = 0,$$

где $\overline{\theta}$ - реакция опоры,

$\overline{F}_1$ - вертикальная составляющая силы $\overline{F}$,

$\overline{F}_2$ - горизонтальная составляющая силы $\overline{F}$,

$\overline{F}_{mp_0}$ - сила трения покоя.

Нетрудно видеть, что имеют место соотношения:

$F_1 = F\cos\alpha;\qquad F_2 = F\sin\alpha;\qquad \theta = Mg - F\sin\alpha;\qquad F_{mp_0} = F\cos\alpha$

Второе условие равновесия тела даёт условие для начала опрокидывания куба вокруг точки А:

$$F \geq Mg\frac{a}{2}$$

откуда $F_{\min} = \dfrac{Mg\sqrt{2}}{4}$

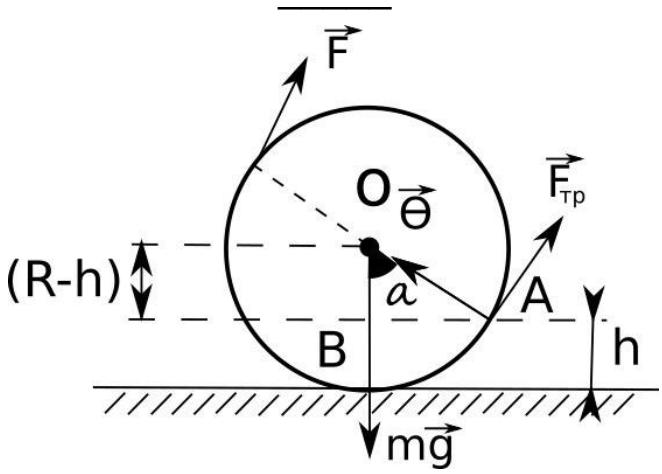
Определим минимальное значение коэффициента трения куба о плоскость:

$$F_{mp_0} = F\cos\alpha \le F_{mp_0}^{\max} = \mu(Mg - F\sin\alpha), \text{ откуда } \mu \ge \frac{F\cos\alpha}{Mg - F\sin\alpha}$$

и поэтому $\mu_{\min} = \frac{1}{3}$

Задача 20.

Масса колеса m=100кг, а его радиус R=0,5 м. Определить минимальную силу $F_{\min}$, которую нужно приложить к колесу, чтобы перекатить его через ступеньку высотой h=0,10 м. Найти также минимальный коэффициент трения $\mu_{\min}$ между колесом и выступом ступеньки, при котором можно это сделать.



Минимальной сила $\overline{F}$ будет в случае, когда она будет приложена к колесу перпендикулярно диаметру АС колеса, проходящем через точку А выступа ступеньки и точку О – центр колеса.

Из чертежа видно:

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$$

Определим величину $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R}$$

Запишем правило моментов относительно точки А:

$$F \cdot 2R = mgR\sin\alpha,$$

где $2R$ - плечо силы $\overline{F}$,

$R\sin\alpha$ - плечо силы $m\overline{g}$

Сила $F = \frac{mg\sqrt{2Rh-h^2}\sin\alpha}{2R}$ будет минимальной , если $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

$$F_{\min} = \frac{mg\sqrt{2Rh-h^2}}{2R} = 294H$$

Рассмотрим вращение колеса вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. При отсутствии проскальзывания относительно выступа ступеньки моменты сил $\overline{F}_{\min}$ и $\overline{F}_{mp}$ относительно центра колеса в момент отрыва колеса от горизонтальной поверхности должны быть равны:

$$F_{\min}R = F_{mp}R, \text{ откуда } F_{\min} = F_{mp_0} \le F_{mp_0}^{\max} = \mu\theta$$

Запишем уравнение равновесия колеса в проекции на его диаметр АС:

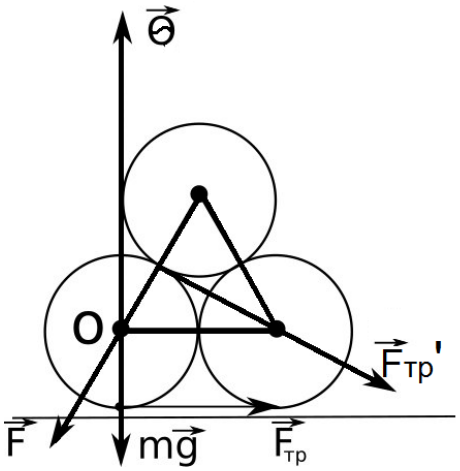
$0 = mg\cos\alpha - \theta$, откуда $\theta = \frac{mg(R-h)}{R}$ - реакция га колесо со стороны выступа.

Тогда: $F_{\min} \le \dfrac{\mu mg(R-h)}{R}$, откуда минимальное значение коэффициента трения между колесом и выступом ступеньки:

$$\mu_{\min} = \frac{F_{тр} R}{mg(R-h)} = 0{,}325$$

Задача 21.

Три трубы одинакового диаметра и массы уложены одна на другую так, как показано на рисунке. Определить минимальный коэффициент трения μ, при котором трубы ещё будут оставаться неподвижными.



Определим силы, действующие на левую нижнюю трубу:

$\overline{F}$ - сила давления со стороны верхней трубы,

$\overline{F}_{тр}$ - сила трения между трубами,

$\overline{f}_{тр}$ - сила трения между трубой и поверхностью,

$m\overline{g}$ - сила тяжести,

$\overline{\theta}$ - реакция опоры.

По второму условию равновесия сумма моментов сил относительно точки О:

$$F_{тр} Z - f_{тр} Z = 0,$$

где Z – радиус трубы.

По первому условию равновесия сумма проекций сил на горизонтальную ось также равна нулю:

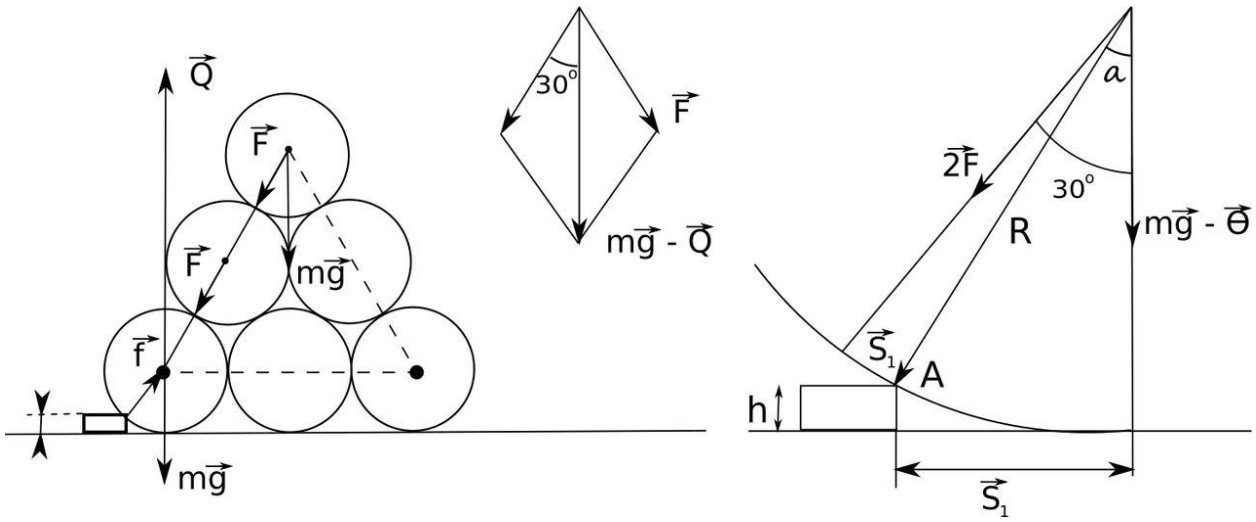
$$f_{тр} + F_{тр}\cos 30 - F\cos 60 = 0$$

Очевидно, что $F_{тр} = \mu F$. Тогда, исключая их обоих уравнений неизвестную $f_{тр}$, найдём:

$$\mu \ge \frac{\cos 60}{1+\cos 30} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

Задача 22.

Шесть одинаковых цилиндров радиусом R каждый уложены так, как показано на рисунке. Под крайние нижние цилиндры уложены подкладки высотой h, удерживающие цилиндры. Определить наименьшую высоту подкладок. Трением пренебречь.



Рассмотрим левый нижний цилиндр. На него действуют:

$m\bar{g}$ - сила тяжести,

$\bar{\theta}$ - сила реакции,

$\bar{f}$ - сила реакции подкладки, направленная по радиусу от точки соприкосновения цилиндра с подкладкой к центру цилиндра,

$2\bar{F}$ - удвоенная сила со стороны верхних цилиндров, стремящаяся перекатить нижний левый цилиндр влево от препятствия высотой *h*.

Точкой, относительно которой возможен поворот, является точка А. Перекатывания не произойдёт при условии:

$$(mg-\theta)S_1 \geq 2FS_2$$

Момент силы $\bar{f}$ относительно точки А равен нулю. Поскольку (из чертежа):

$S_1 = R\sin\alpha, \quad S_2 = R\sin(30-\alpha),$ имеем:

$$(mg-\theta)R\sin\alpha \geq \frac{2(mg-\theta)R}{\sqrt{3}}\sin(30-\alpha),$$

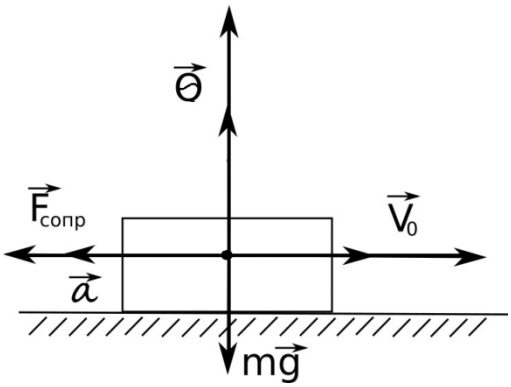
$$\text{откуда } tg\alpha \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Из рисунка: $h = R(1-\cos\alpha)$. Поскольку $\cos\alpha < \sqrt{\frac{12}{13}} \approx 0{,}96$, окончательно получим для высоты прокладки:

$$h \geq 0{,}04R$$

Задача 23.

После прекращения тяги поезд остановился на горизонтальном участке пути через время t=60 с. Определить расстояние S, пройденное поездом за это время, если известно, что сила сопротивления движению не зависит от скорости и составляет 2% от веса всего состава.



Запишем второй закон Ньютона:

$$\overline{F}_{сопр} + \overline{\theta} + m\overline{g} = m\overline{a}$$

Спроектируем это уравнение на горизонтальную и вертикальную оси с учётом того, что $a_x = -a, \quad F_{сопр} = -0{,}02mg$:

$$a = 0{,}02g\,,$$

$$a = mg$$

Путь, пройденный поездом, движущимся с начальной с начальной скоростью V за время t:

$$S = V_0 t - \frac{at^2}{2};$$

а его скорость: $V = V_0 - at$

Поскольку последняя равна V=0 (поезд остановился), имеем:

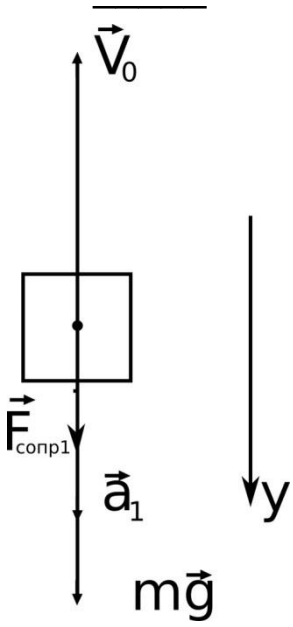
$$S = 0{,}02gt^2 - \frac{0{,}02gt^2}{2} = \frac{0{,}02gt^2}{2}$$

Таким образом:

$$S = \frac{0{,}02gt^2}{2} = 352{,}8\,м$$

Задача 24.

Через сколько секунд тело, брошенное вертикально вверх со скоростью $V_0 = 44{,}8\,м/с$, *упало на землю, если сила сопротивления воздуха не зависела от скорости и в среднем составляла* $\frac{1}{7}mg$ *?*



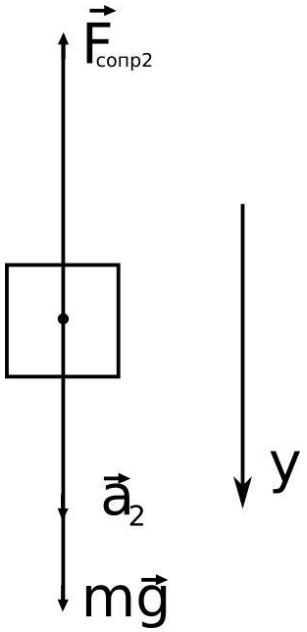
Рассмотрим сначала движение тела вверх (от момента броска до точки максимального подъёма). Запишем второй закон Ньютона:

$$\overline{F}_{сопр_1} + m\overline{g} = m\overline{a}_1$$

В проекциях на ось Y:

$$\frac{1}{7}mg + mg = ma_1,$$

откуда ускорение $a_1 = \frac{8}{7}g$.



Аналогично при движении тела вниз его ускорение

$$a_2 = \frac{6}{7}g.$$

Максимальная высота подъёма тела с учётом того, что в этой точке тело остановится, определится выражением:

$$h_{\max} = \frac{V_0^2}{2a_1} = \frac{7V_0^2}{16g} = 89{,}6\,м.$$

А время подъёма тела на эту высоту:

$$t_1 = \frac{V_0}{a_1} = \frac{7V_0}{8g} = 4\,c.$$

Аналогично рассчитаем соответствующие величины при движении из точки максимального подъёма до падения на землю:

$$h_{\max} = \frac{a_2 t_2^2}{2},\ t_2 = \sqrt{\frac{2h_{\max}}{a_2}} = \sqrt{\frac{7h_{\max}}{3g}} = 4{,}6\ c.$$

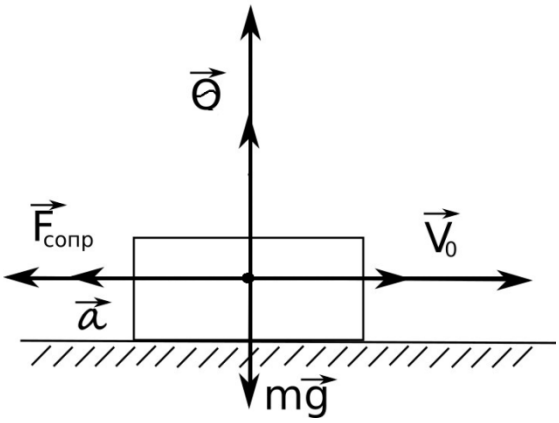
Общее время движения тела от его броска до падения на землю:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{7V_0}{4g}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 8{,}6\,c.$$

Задача 25.

Санки массой m=5 кг в течение времени $t_1 = 5\,c$ тянули по горизонтали, прикладывая к ним силу $F = 20\ H$. С учётом того, что коэффициент трения между санками и дорогой $\mu = 0{,}3$, определить, какой путь S пройдут санки до их остановки, если их больше не трогать?

———

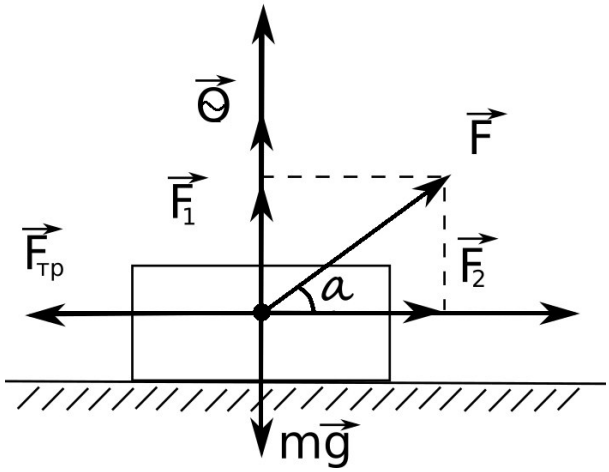


Рассмотрим все силы, действующие на санки под действием силы F и спроектируем 2 закон Ньютона в проекции на направление движения:

$$F - \mu mg = ma_1, \text{ откуда } a_1 = \frac{F - \mu mg}{m} t_1 = 5{,}3 \, м/с$$

Определим и перемещение санок на первом участке цепи:

$$S_1 = \frac{V_1^2}{2a_1} = 12{,}8 \, м.$$



После прекращения действия силы F (F=0) движение санок стало замедленным. С учётом того, что $F_{тр} = \mu mg$, имеем для времени движения санок до остановки выражение: $t_2 = \frac{V_1}{\mu g} = 1{,}8 c$, а для его перемещения $S_2 = V_1 t_2 - \frac{\mu g t_2^2}{2} = 4{,}8 м$.

Перемещение S_2 санок на втором участке пути можно определить и иначе:

$$S_2 = \frac{V_1^2}{2a_2} = \frac{V_1^2}{2\mu g}$$

Таким образом, до полной остановки санки пройдут путь:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{F}{2\mu mg}(F - \mu mg) t_1^2 = 17{,}6 \, м.$$

Задача 26.

Спутник Земли массой $m = 10$ *кг обращается в верхних слоях атмосферы.*

Определить, насколько изменится скорость спутника за один оборот, если сила сопротивления его движению составляет $F_{сопр} = 5 \cdot 10^{-11}$ Н^3

Спутник на орбите взаимодействует с Землей по закону всемирного тяготения. Потенциальная энергия их взаимодействия на бесконечности равна нулю. На конечных расстояниях 2 от центра Земли потенциальная энергия взаимодействия спутника с Землей

$$W_p = -G\frac{mM}{r},$$

Где m - масса спутника,

M – масса Земли.

Свяжем систему отсчета с Землей. Тогда выражение для полной энергии спутника при его движении со скоростью $\vec{\vartheta}$ по круговой орбите вокруг Земли:

$$W = \frac{mV^2}{2} - G\frac{mM}{r}$$

Центростремительной силой, действующей на спутник, является сила притяжения его к Земле:

$$\frac{mV^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}, \text{откуда } V^2 = G\frac{M}{r} \quad (1)$$

Если тело находится на поверхности Земли, то сила тяжести mg_0 равна силе тяготения (в пренебрежении суточным движениям Земли):

$$mg_0 = G\frac{mM}{R^2}, \text{где } g_0 = 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \text{ускорение свободного падения поверхности Земли,}$$

$$R = 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ м} - \text{радиус Земли}$$

Из этих выражений следует:

$$GM = g_0R^2, W = \frac{mV^2}{2} - \frac{mg_0R^2}{r} \quad (2)$$

Из (2) видно, что полная энергия W спутника = W (V, r).

Выразив радиус r орбиты из (1) и подставив его в (2) получим выражение для полной энергии спутника как функцию только его скорости ϑ:

$$W_{\text{полн}} = \frac{mV^2}{2} - \frac{mg_0R^2V^2}{GM} = \frac{mV^2}{2} - \frac{mg_0R^2V^2}{g_0R^2} = \frac{mV^2}{2} - mV^2 = -\frac{mV^2}{2} \quad (3)$$

Вычислим скорость V спутника, используя выражение (1):

$$V = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}$$

Поскольку по условию задачи спутник движения в верхних слоях атмосферы $r \approx R$, то есть $V = R\sqrt{\frac{g_0}{R}} = \sqrt{Rg_0}$

Работа сил сопротивления среды уменьшает полную энергию спутника, поэтому по (3) модуль скорости спутника возрастает:

$$A_{\text{сопр}} = -F_{\text{сопр}}2\pi R = W(V + \Delta V) - W(V) \quad (4)$$

Поскольку

$$W_{\text{полн}} = -\frac{mV^2}{2}, \text{а } W(V + \Delta V) = -\frac{m}{2}(V + \Delta V)^2 = -\frac{mV^2}{2} - mV\Delta V - \frac{m\Delta V^2}{2},$$

Имеем, пренебрегая $\frac{m\Delta\vartheta^2}{2}$ ввиду его малости:

$$W(V + \Delta V) - E(V) = -\frac{mV^2}{2} - mV\Delta V - \frac{m\Delta V^2}{2} + \frac{mV^2}{2} \approx -mV\Delta V.$$

Тогда из (4) получим окончательно:

$$\Delta V = \frac{F_{\text{сопр}}2\pi}{m}\sqrt{\frac{R}{g_0}} = 0{,}25\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Задача 27.

Спутник Фобос вращается вокруг Марса по круговой орбите радиуса R=9400 км с периодом T=7 часов 39 минут.

Считая, что радиус Марса R_0=3400 км, определить ускорение свободного падения на поверхности Марса

———

Запишем 2 закон Ньютона для Фобоса, движущегося по круговой орбите радиуса R под действием силы гравитационного притяжения:

$$ma = G\frac{mM}{R^2},$$

Где m – масса Фобоса,
M – масса Марса,
a – центростремительное ускорение.

С другой стороны, $a = \frac{V^2}{R} = (\frac{2\pi}{R})^2 R$,

Где V –линейная скорость Фобоса при движении на орбите,
T – период обращения Фобоса вокруг Марса

Ускорение свободного падения $g_м$ на поверхности Марса: $g_м = G\frac{M}{R_0^2}$

Где R_0 – радиус Марса

Совместное решение уравнений (вращение Марса не учитывается) приводит к результату:

$$g_м = (\frac{2\pi}{T})^2 \frac{R^3}{R_0^2} = 3{,}7\ \frac{м}{c^2}$$

Задача 28.

У края диска, радиус которого R, лежит монета. Диск раскручивают так, что его угловая скорость линейно зависит от времени $(\omega = \delta t)$.

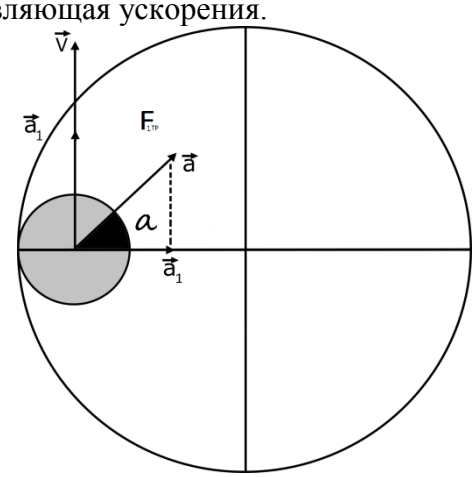
В какой момент времени t монета слетит с диска, если коэффициент трения между поверхностью диска и монетой равен μ*?*

Определить также, какой угол α *с направлением к центру диска образует сила трения в этот момент времени?*

До тех пор, пока монета лежит на диске, её линейная скорость $\vec{V}$ равна скорости соответствующих точек диска:

$$V = \omega R = \delta t R = a_1 R,$$

Где $a_1 = \delta R$ – тангенциальная составляющая ускорения.



Центростремительная составляющая ускорения монеты, обеспечивающая ее движение по окружности, равна:

$$a_2 = \frac{V^2}{R} = \delta^2 R t^2.$$

Полное ускорение монеты:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \delta R\sqrt{1 + \delta^2 t^4}.$$

Это ускорение создается силой трения:

$$F_{тр} = \mu Q = \mu mg = ma.$$

Из двух последних уравнений определим момент времени t, в который монета слетит с диска:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{\mu^2 g^2}{\delta^2 R^2} - 1\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Легко видеть, что при условии $\delta > \frac{\mu g}{R}$ монета слетит с диска, так как сила трения между ее поверхностью и диском будет недостаточной для обеспечения соответствующего ускорения.

Направление силы трения $F_{тр}$, совпадающего с направлением ускорения тела, определится из соотношения:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\delta R}{\delta^2 R t^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu^2 g^2}{\delta^2 R} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Задача 29.

Угол, под которым с Земли наблюдается Солнце, равен примерно $\alpha \approx 10^{-2}$рад.
Полагая радиус Земли равным $R_з = 6400$ км, *определить отношение средних плотностей Земли и Солнца, принимая во внимание, что* 1 год $\approx 3 \cdot 10^7$с.

При движении Земли вокруг Солнца между ними действует сила тяготения:

$$F = G\frac{M_з M_c}{l},$$

Где $M_з$ – масса Земли,
M_c – масса Солнца,
l – радиус орбиты при вращении Земли вокруг Солнца.
Эта сила сообщает Земле центростремительное ускорение:

$$a = \omega^2 l = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l,$$

Где T – период обращения Земли вокруг Солнца.
По 2-му закону Ньютона:

$$G\frac{M_з M_c}{l^2} = M_з\frac{4\pi^2}{T^2}l.$$

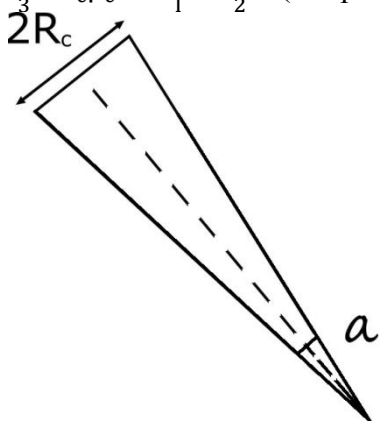
С учетом того, что на поверхности Земли ускорение свободного падения

$$g_0 = G\frac{M_з}{R_з^2},$$

Имеем:

$$\frac{M_з}{M_c} = \frac{g_0 R_з^2 T^2}{4\pi^2 l^3}$$

Поскольку $M_з = \frac{4}{3}\pi R_з^3 \rho_з$ и $M_c = \frac{4}{3}\pi R_c \rho_c$ и $\frac{R_c}{l} = \frac{\alpha}{2}$ (см. рисунок)



Получим окончательно

$$\frac{\rho_з}{\rho_c} = \frac{g_0 \alpha^3 T^2}{32\pi^2 R_з} \approx 4{,}4$$

Задача 30.

Тело массой m, находящееся на вершине наклонной плоскости, удерживается на ней силой трения.

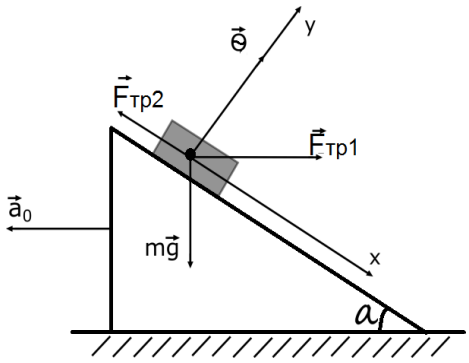
За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если плоскость перемещать горизонтально с ускорением $a_0 = 1\frac{м}{с^2}$.
Длина плоскости $l = 1м$, *угол наклона к горизонту* $\alpha = 30°$, *коэффициент трения между телом и плоскостью* $\mu = 0{,}6$.

Выберем систему отсчета, связанную с плоскостью. Пока плоскость покоится, на тело действуют 3 силы, уравновешивающие друг друга:

$m\vec{g}$ – сила тяжести,

Θ– сила нормального давления опоры,

$\overrightarrow{F_{тр}}$ – сила трения покоя.



Как только плоскость начнет двигаться с ускорением a_0, появится еще одна сила, действующая на тело

$$F_{ин} = -m\overrightarrow{a_0}$$

«Привязанная» к плоскости система отсчета станет неинерциальной. Равновесие нарушится, и тело начнет с ускорением $\vec{a}$ скользить вниз по наклонной плоскости.

Время спуска тела с наклонной плоскости определится из известной формулы равноускоренного движения без начальной скорости

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \qquad (1)$$

Для нахождения величины ускорения $\vec{a}$ запишем 2 закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета:

$$m\vec{g} + \vec{\Theta} + \overrightarrow{F_{тр}} + \overrightarrow{F_{ин}} = m\vec{a} \qquad (2)$$

Выберем оси проекций, показанные на рисунке, и получим из (2) два скалярных уравнения:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} + ma_0\cos\alpha = 0; \qquad (3)$$

$$-mg\cos\alpha + \Theta + ma_0\sin\alpha = 0$$

Решим (2) совместно с учетом того, что $F_{тр} = \mu\Theta$ и получим:

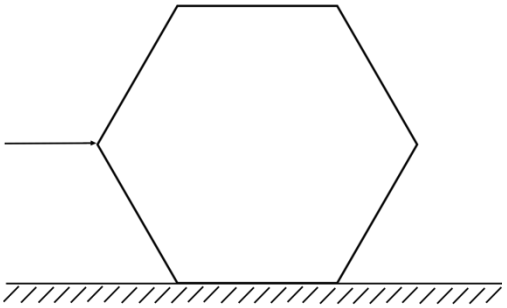
$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \qquad (4)$$

Подставляем (4) в (1) и определим время спуска тела по наклонной плоскости:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}} \approx 0{,}8\ с.$$

Задача 31.

Шестиугольный карандаш толкнули вдоль горизонтальной плоскости так, как показано на рисунке.

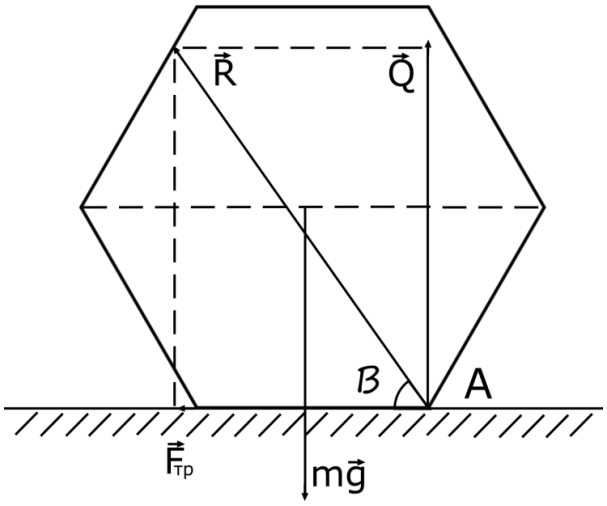


При каком значении коэффициента трения μ между карандашом и плоскостью, карандаш будет скользить по плоскости, не вращаясь.

На движущийся карандаш действуют со стороны плоскости две силы:

$\vec{?}$ – сила нормальной реакции плоскости,

$\overrightarrow{F_{тр}}$ – сила трения.



Поскольку карандаш, по условию задачи, не перемещается в вертикальном направлении:

$$\vec{?} = -m\vec{g}$$

Модуль силы трения $|\overrightarrow{F_{тр}}| = \mu? = \mu mg$.

Рассмотрим «критический» момент, когда карандаш касается плоскости только в точке А. Для того, чтобы карандаш не вращался, равнодействующая всех сил должна проходить через центр масс карандаша. Если коэффициент трения недостаточно большой и сила $\vec{R}$ проходит ниже центра масс, карандаш будет вращаться.

Условие того, что карандаш вращаться не будет:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{?}{F_{тр}} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}, \text{ или } \frac{mg}{\mu mg} > \sqrt{3}.$$

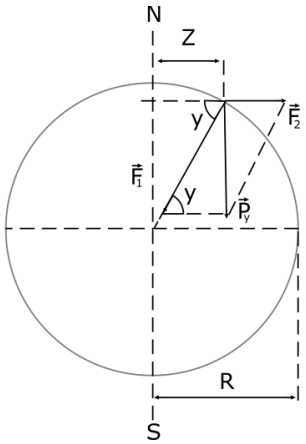
Отсюда имеем:

$$\mu < \sqrt{3}.$$

Задача 32.

В предположении, что Земля - это сфера радиуса R, найти закон изменения веса тела в зависимости от географической широты местности.

Пусть R и M – радиус и масса Земли, а ω - угловая скорость ее вращения вокруг вертикальной оси.



Географическая широта y – это угол между радиусом Земли R, лежащим в плоскости экватора и радиусом, направленным в данную точку поверхности. Линейная скорость произвольной точки поверхности:

$$V = \omega R \cos\alpha.$$

Поскольку Земля является телом, движущимся с ускорением, она представляет собой неинерциальную систему отсчета.

Поэтому на тело массой m, находящееся на широте y, с точки зрения земного наблюдателя действует фиктивная центробежная сила.

$$|\overrightarrow{F_{цб}}| = m\omega^2 r = m\omega R\cos\alpha.$$

Эта сила складывается с силой притяжения тела массой m к центру Земли, равной

$$|\vec{F}| = G\frac{Mm}{R^2}$$

Определит величину и направление силы тяжести $\overrightarrow{P_ц}$, действующую на тело, нахдящееся на широте y:

$$\overrightarrow{P_y} = \overrightarrow{F_{цб}} + \vec{F}.$$

Величину силы тяжести определим по теореме косинусов:

$$P_y = \sqrt{G^2\frac{M^2m^2}{R^4} + m^2\omega^2R^2\cos^2\alpha + 2mG\frac{M}{R}\cos^2 y}$$

Сила $|\overrightarrow{F_{цб}}| \ll |\vec{F}| = mg$, где g – ускорение свободного падения при $|\overrightarrow{F_{цб}}| = 0$. В этом легко убедиться, подставляя в соотношение $\frac{F_{цб}}{F} = \frac{\omega^2 R}{g}\cos\alpha$ соответствующие табличные данные: $\frac{\omega^2 R}{g} \approx \frac{1}{300}$.

Раскладывая силу $\overrightarrow{F_{цб}}$ на вертикальную ($F_{цб}\cos\alpha$) и горизонтальную ($F_{цб}\sin\alpha$) составляющие и приближенно считая, что первая из них изменяет силу $\vec{F}$ только по модулю, а вторая – только по направлению, получим:

$$P_y = F - F_{цб}\cos\alpha = mg - m\omega^2R^2\cos^2\alpha$$

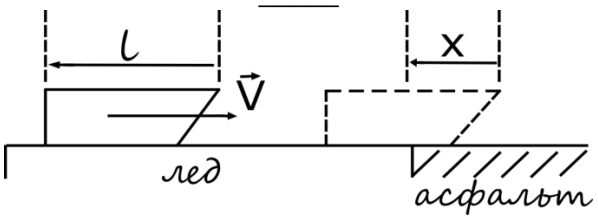
К решению сделаем 2 примечания:

1. Очевидно, что горизонтальная составляющая $F_{цб}\sin y = m\omega^2R^2\cos y\sin y$ отклоняет направление силы тяжести в сторону экватора. Эта составляющая равна нулю на полюс, при угле она достигает максимального значения, а на экваторе вновь обращается в нуль.
2. Приведенный выше расчет сделан при предположении, что Земля – сферическое тело, что, как известно, не соответствует действительности. Не сферичность (сплюснутость) Земли приводит к тому, что ускорение свободного падения на экваторе приблизительно на 0,5% меньше, чем на полюсе.

Задача 33.

Санки, скользящие горизонтально со скоростью $\vec{V}$ по льду, выезжают на асфальт. Длина полозьев саней равна l, коэффициент трения санок об асфальт μ.

Пренебрегая трением о лед, определить, какое расстояние пройдут санки по асфальту до полной остановки?



Будем считать, что на асфальт въехал участок саней длиной X. Вес этой части санок:

$$P(x) = \frac{mg}{l}x.$$

Сила трения, действующая на этот участок полозьев, равна:

$$F_{тр}(x) = \mu P(x) = \mu\frac{mg}{l}x. \qquad (1)$$

Из (1) видно, что $F_{тр}(x)$ линейно возрастает от нулевого значения (при x = 0) до максимального значение $F_{тр}^{max} = \mu mg$ (при $x = l$)

Работу переменной силы трения на участке пути S_1 , равной длине полозьев санок, найдем как работу средней (постоянной по модулю) силы трения, равна половине максимального значения силы трения:

$$A_{тр1} = -\frac{F_{тр}^{max}}{2}S_1 = -\mu mgS_1 \qquad (2)$$

При дальнейшем движении санок по асфальту сила трения $F_{тр} = F_{тр}^{max}$ остается постоянной по величине, а работа этой силы на участке пути S_2 равна

$$A_{тр2} = -F_{тр}^{max}S_2 \qquad (3)$$

По закону сохранения энергии, с учетом того, что санки остановились:

$$0 - \frac{mV^2}{2} = A_{тр1} + A_{тр2} = -\frac{\mu mg}{2}l - \mu mgS_2,$$

Откуда:

$$S_2 = \frac{V^2 - l\mu g}{2\mu g}$$

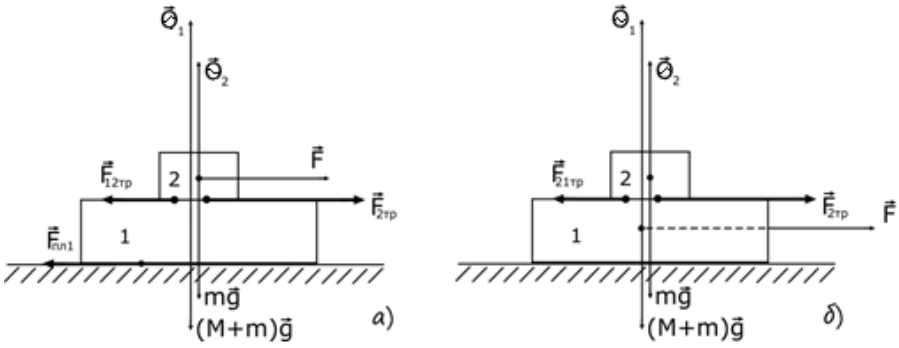
Тогда общее расстояние, пройденное санками по асфальту:

$$S = l + S_2 = l + \frac{V^2 - l\mu g}{2\mu g} = \frac{V^2 + l\mu g}{2\mu g}$$

Задача 34.

На горизонтальной плоскости лежит доска(1), масса которой M. На доске помещен груз(2), масса которого m. Горизонтальная сила приложена в случае а) – к грузу, а в случае б) – к доске. Коэффициент трения между плоскостью и доской равен μ_1, а между доской и грузом μ_2.

Определить ускорения обеих тел в первом и во втором случаях, а также необходимые условия для того, чтобы в случае а) – сдернуть груз с доски, а в случае б) – выдернуть доску из-под груза.



а): Рассмотрим силы, действующие по горизонтали на каждое тело. В отдельности на груз действует внешняя сила $\vec{F}$ и сила тормозящего действия $\overrightarrow{F_{12тр}}$. На доску действует сила движущего трения $\overrightarrow{F_{21}}$ (со стороны груза), приложенная к доске и увлекающая ее за грузом, и сила тормозящего трения $F_{пл1}$ между доской и плоскостью.

Что касается вертикальных сил, то очевидно:

$$N_2 = mg;\ N_1 = (M + m)g.$$

Запишем уравнения движения для доски и для груза в проекциях на горизонталь:

$$F_{21} - F_{пл1} = ma_1;$$
$$F - F_{12тр} = ma_2.$$

Используем также очевидные соотношения:

$$\left|\overrightarrow{F_{21}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{12тр}}\right| = \mu_2 N_2 = \mu_2 mg;$$
$$F_{пл1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 (M + m)g.$$

Отсюда находим:

$$a_1 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)mg}{M} - \mu_1 g;\ a_2 = \frac{F}{m} = -\mu_2 g.$$

Чтобы сдернуть груз с доски, необходимо соблюдение равенства:

$$a_2 > a_1 \text{ или } F > (\mu_2 - \mu_1)mg\frac{M + m}{M}.$$

б): В отличие от предыдущего случая, сила движущего трения F_{12} увлекает груз вслед за доской и приложена к грузу, а не к доске. Кроме того, сила тормозящего трения $F_{21тр}$ приложена в этом случае не к грузу, а к доске.

Запишем уравнения движения для доски и груза в проекциях на горизонталь:

$$F - F_{пл1} - F_{21тр} = Ma_1;$$
$$F_{12} = ma_2.$$

Учитывая приведенные выше выражения для сил трения найдем:

$$a_1 = \frac{F - (\mu_1 + \mu_2)mg}{M} - \mu_1 g;$$
$$a_2 = \mu_2 g.$$

Чтобы выдернуть доску из-под груза, надо чтобы выполнялось условие:

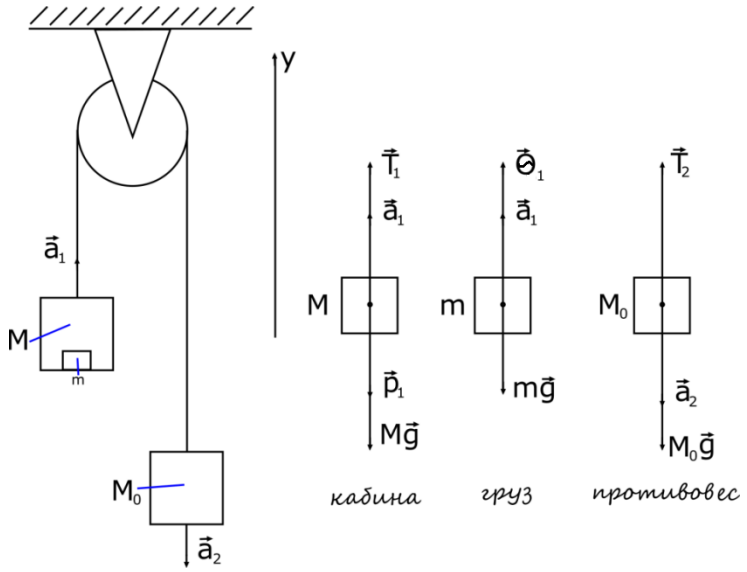
$$a_1 > a_2 \text{ или } F > g(\mu_1 + \mu_2)(M + m).$$

Задача 35.

В кабине лифта, масса которого $M = 100$ кг, *лежит груз массой* $m = 50$ кг.

Определить силу $\vec{T}$ *натяжения троса и силу* $\overrightarrow{P_{давл}}$ *давления груза на пол кабины в то время, когда лифт поднимается противовесом* $\left|\vec{P} = M_0\vec{g}\right| = 1{,}96$ кН. *Трение не учитывать, массой троса пренебречь.*

Изобразим силы, действующие на каждое из тел системы: кабину, груз и противовес.



На рисунках: $\overrightarrow{T_1}$ и $\overrightarrow{T_2}$ – силы натяжения троса, $M\vec{g}$, $m\vec{g}$, $M_0\vec{g}$ – силы тяжести, действующие на кабину, груз и противовес соответственно.

Вес P_0 в покое равен силе тяжести: $|\overrightarrow{P_0}| = |M_0\vec{g}|$.

Груз действует на кабину лифта с силой $\overrightarrow{P_1}$ – своим весом. В ответ на это, по 3 закону Ньютона, кабина действует на груз с силой $\overrightarrow{\theta_1}$ – реакция опоры.

Очевидно, что:

$$\overrightarrow{P_{давл}} = -\overrightarrow{\theta_1}, \qquad \text{т.е. } P_{давл} = \theta_1.$$

Запишем уравнение движения(2 закон Ньютона) для каждого тела в векторном виде и в проекциях на вертикальную ось Y:

$$\begin{cases} M\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{Mg}; \\ m\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{\theta_1} + m\vec{g}; \\ M_0\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{T_2} + M_0\vec{g}; \end{cases} \qquad \begin{cases} Ma_1 = T_1 - P_1 - Mg; & (1) \\ ma_1 = \theta_1 - mg_1; & (2) \\ M_0g = -T_2 + M_0g & (3) \end{cases}$$

Из условия, что трос невесомый и нерастяжимый, следует:

$$T = T_1 = T_2; \;\; a = a_1 = a_2.$$

Из сложения левых и правых частей уравнений (1), (2) и (3) получим:

$$(M + m + M_0)a = T_1 - P_1 - Mg + \theta_1 - mg - T_2 + M_0g = (M_0 - M - m)g.$$

Отсюда определим ускорение a системы и массу M_0 противовеса:

$$a = \frac{M_0 - M - m}{M_0 + M + m}g = 1{,}4\,\frac{м}{c^2}; \; M_0 = \frac{P_0}{g} = 200 \text{ кг}.$$

Силу T натяжения троса определим из (3):

$$T = T_2 = M_0(g - a) = 1680 \text{ Н}.$$

Силу P_1 давления груза на пол кабины лифта найдем из (2):

$$P_1 = Q_1 = m(g + a) = 560 \text{ Н}.$$

Задача 36.

Тело находится на плоскости, угол наклона которой изменяется от 0 *до* $\pi/2$.

Построить график зависимости силы трения $F_{тр}$ тела о плоскость в зависимости от угла α наклонна плоскости к горизонту.

Масса тела m, коэффициент трения тела о плоскость μ.

———

Запишем уравнение движения тела:

$$m\vec{g} + \overrightarrow{F_{тр}} + \vec{\theta} = ma,$$

Где $m\vec{g}$ – сила тяжести,

$\overrightarrow{F_{тр}}$ – сила трения,

$\vec{\theta}$ – реакция плоскости.

Спроектируем это уравнение на координатные оси:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma,$$

$$-mg\cos\alpha + \text{[illegible]} = 0,$$

А также учтем, что из определения коэффициента трения: $F_{тр}^{max} = \mu\theta$.

$\alpha_{крит}$ – критический угол, начиная с которого тело начнет соскальзывать с плоскости. В диапазоне значений угла $0 \le \alpha \le \alpha_{крит}$ тело неподвижно и тогда из проекции уравнения движения тела на ось X с учетом того, что $\vec{\alpha} = 0$ получим искомую зависимость в указанном диапазоне углов:

$$F_{тр} = mg\sin\alpha.$$

В случае, когда $\alpha = \alpha_{крит}$ ускорение тела все еще равно нулю, однако сила трения достигает максимального значения $F_{тр}^{max} = \mu$[illegible] и из проекции уравнений движения на координатные оси, найдем:

$$F_{тр} = mg\sin\alpha_{крит} = \mu mg\cos\alpha_{крит};$$

$$\alpha_{крит} = \arctan\mu.$$

И, наконец, в случае $\alpha_{крит} < \alpha \le {}^{\pi}/_{2}$ тело находится в движении, сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя $F_{тр}^{max}$ и $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$.

График изменения силы трения от угла α показан на рисунке

Задача 37.

Спутник движется по круговой орбите на расстоянии от поверхности Земли, равном ее радиусу. В некоторый момент времени со спутника запустили станцию на другую планету, после чего составляющая часть спутница стала двигаться по эллиптической орбите, подходящей очень близко к поверхности Земли в точке, противоположной точке старта станции.

Какую максимальную часть массы спутница может составить масса межпланетной станции?

При запуске станции энергетически выгодно использовать имеющуюся орбитальную скорость спутника и сообщить станции скорость $\vec{U}$ в том же направлении, в каком двигался спутник. Спутник при этом приобретаем противоположно направленную скорость $\vec{V}$.

Используем закон сохранения импульса:

$$mU - M_1V = MV_0 \text{ или } mV - (M - m)U = MV_0.$$

Где M – первоначальная масса спутника,

m – масса станции,

$M_1 = (M - m)$ – масса «остатка»,

V_0 – скорость спутника на орбите.

Отсюда имеем:

$$\frac{m}{M} = \frac{V_0 + U}{U + V} \qquad (1)$$

Решение задачи сведется к нахождению величин $V_0, V,$ и U.

Поскольку при движении спутника по круговой орбите радиуса 2R центростремительное ускорение $a = \frac{V_0^2}{2R}$ ему сообщаем силу тяготения $F = G\frac{MM_з}{(2R)^2}$, где $M_з$ - масса Земли, имеем:

$$\frac{MV_0^2}{2R} = G\frac{MM_з}{(2R)^2}, \text{откуда } V_0 = \sqrt{G\frac{M_з}{2R}}. \qquad (2)$$

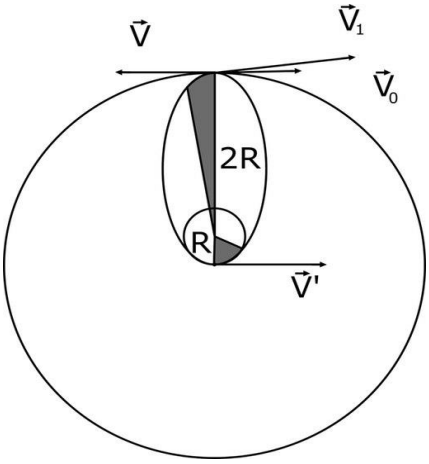
Полная механическая энергия запускаемой станции в момент старта равна нулю:

$$\frac{mU^2}{2} - G\frac{M_з m}{(2R)^2} = 0, \text{откуда } V_0 = \sqrt{G\frac{M_з}{R}} \qquad (3)$$

По закону сохранения энергии:

$$\frac{M_1V^2}{2} - G\frac{M_з M_1}{2R} = \frac{M_1(V')^2}{2} - G\frac{M_з M_1}{R}, \qquad (4)$$

Где V' - скорость «остатка» в перигее (см. рисунок).



С другой стороны, используя 2 закон Кеплера, согласно которому радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равновеликие площади, имеем:

$$2RV = RV \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получим:

$$V = \sqrt{G\frac{M_з}{3R}}.$$

Тогда, подставляя значения V, V_0 и U в (1), получим:

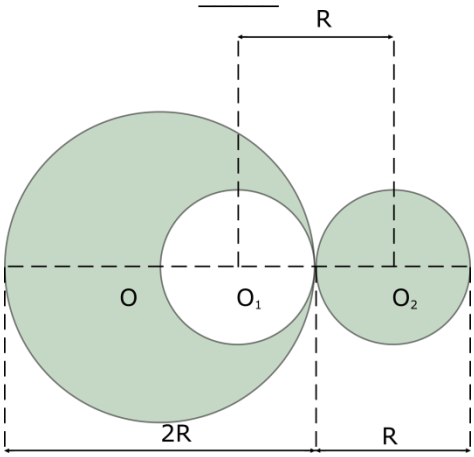
$$\frac{m}{M} \approx 0{,}8$$

Задача 38.

В шаре радиуса R сделана сферическая плоскость, поверхность которой касается шара.

С какой силой этот шар будет притягивать шар диаметром R, имеющий плотность большого шара, если шары разместить относительно друг друга как показано на рисунке?

Принять массу большего шара равной M.



Если бы шар диаметром 2R был сплошным, то он притягивал бы маленький шар диаметром R с силой, равной:

$$F = G\frac{Mm}{(R+\frac{R}{2})^2} = \frac{4}{9}G\frac{Mm}{9R^2},$$

Где $(R+\frac{R}{2})$ – расстояние между центрами шаров,

m – масса меньшего шара.

Эта сила складывается из двух сил:

$$F = F_1 + F_2,$$

Где F_1 – сила притяжения шара со сферической плоскостью,

F_2 – сила притяжения сплошного шара диаметром R, находящегося на месте полости.

Сила $\vec{F}$приложена к центру сплошного шара диаметром R и направлена вдоль линии, соединяющая центры шаров.

Вычислим величину силы F_2:

$$F_2 = G\frac{m^2}{\left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\right)} = \frac{Gm^2}{R^2},$$

Где $R = \left(\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\right)$ – расстояние между центрами O_1 и O_2 сферической полости и сплошного шара диаметром R.

Вычислим массу m меньшего шара:

$$m = \rho\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi\rho R^3,$$

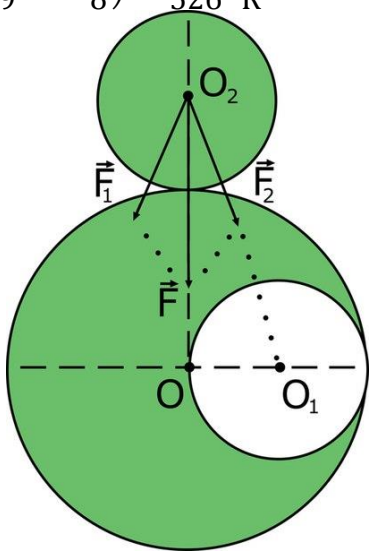
Где $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3}$ – плотность вещества, из которого изготовлены шары.

Легко видеть, что

$$m = \frac{1}{6}\pi\frac{3M}{4\pi R^3}R^3 = \frac{M}{8}.$$

Поэтому окончательное выражение для силы взаимодействия шаров примет вид:

$$F_1 = G\frac{M}{R^2}\left(\frac{4}{9}M - \frac{M}{8}\right) = \frac{23}{526}\frac{GM^2}{R^2} \approx 0{,}04\frac{GM^2}{R^2}$$



При другом расположении шаров, рассмотренном на рисунке, сила $\vec{F}$ будет направлена по линии OO_2, а сила $\overrightarrow{F_1}$ – по линии O_1O_2. Последняя будет одной из составляющих силы $\vec{F}$. Другую составляющую $\overrightarrow{F_2}$ легко получить при построении параллелограмма сил $\vec{F}$ и $\overrightarrow{F_1}$.

Из чертежа:

$$OO_1 = \frac{R}{2}; OO_2 = \frac{3}{2}R;\ O_1O_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}R\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{10};\ \cos\alpha = \frac{OO_2}{O_1O_2} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

По теореме косинусов:

$$F_1^2 = F^2 + F_2^2 - 2FF_2\cos\alpha = F^2 + F_2^2 - \frac{6FF_2}{\sqrt{10}}.$$

С учетом одного из результатов предыдущей задачи (а именно: $m = \frac{M}{8}$) вычислим значения величин F и F_2:

$$F = G\frac{Mm}{(OO_2)^2} = \frac{GM^2}{18R^2};\ F_2 = \frac{Gm^2}{(O_1O_2)^2} = \frac{GM^2}{160R^2}.$$

Подставив эти значения в предыдущее выражение, получим:

$$F_1 = \frac{GM^2}{R^2}\sqrt{\frac{1}{18^2}+\frac{1}{160^2}-\frac{1}{480\sqrt{10}}} \approx 0{,}05\frac{GM^2}{R^2}$$

Проанализируйте, почему при таком расположении шаров сила их взаимодействия пусть незначительно, но больше, чем в предыдущем случае.

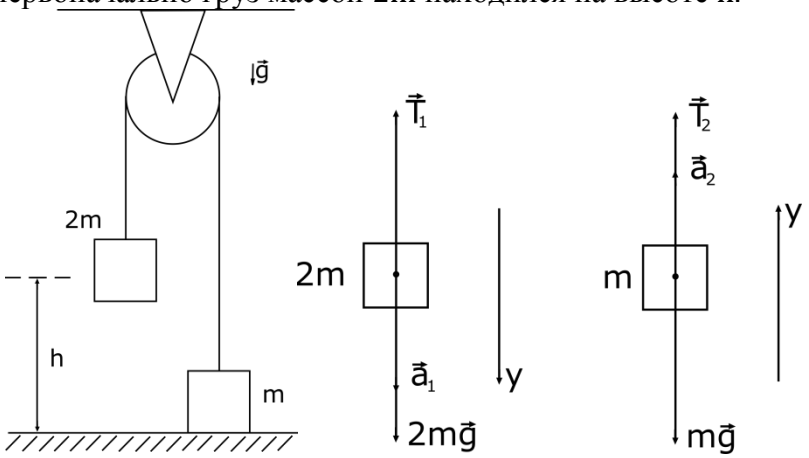
Задача 39.

Через блок, массой которого можно пренебречь, протянута нить, на которой находятся грузы массами m и $2m$. Большой массы груз поднимаю настолько, чтобы меньший груз коснулся пола.

На какую максимальную высоту поднимется этот груз, если систему предоставить самой себе?

Решить задачу в двух случаях: а) на нить не действует сила трения; б) на нить при ее скольжении по блоку действует сила трения $F_{тр} = 0{,}5mg$.

Будем считать, что первоначально груз массой $2m$ находился на высоте h.



а) решим задачу для случая, где на нить не действует сила трения. Поясним обозначения на рисунках:

$\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$ – силы натяжения нитей.

$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ – ускорения грузов.

У нас: $a_1 = a_2 = a$; $T_1 = T_2 = T$.

Ускорение системы определим из уравнений движения системы (в векторном виде и в проекциях на ось Y):

$$\begin{cases} 2m\overrightarrow{a_1} = 2m\vec{g} + \overrightarrow{T_1} \\ m\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{T_2} + m\vec{g} \end{cases} \begin{cases} 2ma = 2mg - T_1 \\ ma = T_2 - mg, \end{cases} \text{ откуда } a = \frac{g}{3}.$$

Меньший груз скажется на высоте h через время t после начала движения:

$$h = \frac{at^2}{2}, \text{откуда } t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{6h}{g}}.$$

При этом его скорость V_0 составит величина:

$$V_0 = at = \sqrt{\frac{2hg}{3}}.$$

После этого груз массой m будет двигаться вверх только под действием силы тяжести (невесомая нить этому движению не препятствует). Дополнительная высота Δh подъема тела составит величину:

$$\Delta h = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{1}{3}h.$$

Максимальная высота подъема тела массой m над полом будет равна:

$$h_{max} = h + \Delta h = h + \frac{h}{3} = \frac{4}{3}h.$$

б) в этом случае сила $\overrightarrow{T_1}$ натяжения нити по модулю будет больше сила $\overrightarrow{T_2}$ по величине силы трения.

$$T_1 = T_2 + F_{тр} = T_2 + \frac{1}{2}mg \text{ или } T_1 - T_2 = \frac{1}{2}mg.$$

Снова напишем уравнения движения грузах (в проекциях на ось Y) и определим ускорение a:

$$\begin{cases} 2ma = 2mg - T_1 \\ ma = T_2 - mg, \end{cases} \quad a = \frac{1}{6}g.$$

Повторяя вычисления в том же порядке, как и предыдущем случае, найдем:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}};\ \vartheta_0 = at = \sqrt{2ha};\ \Delta h = \frac{\vartheta_0^2}{2g} = \frac{h}{6}$$

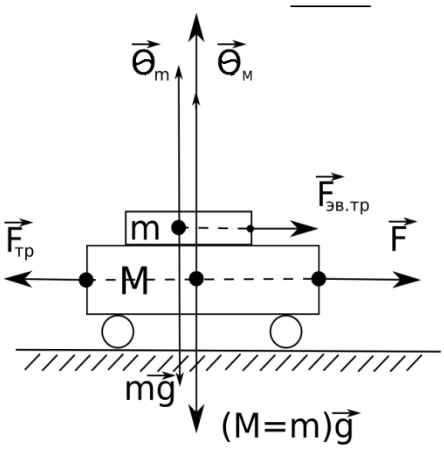
Тогда:

$$h_{max} = h + \Delta h = h + \frac{h}{6} = \frac{7}{6}h$$

Задача 40.

На горизонтальной плоскости находится тележка массой M, на которой стоит груз массой m. К тележке приложена горизонтальная сила F. Коэффициент трения между тележкой и грузом равен μ, тележка движется по плоскости без трения.

Определить минимальную силу F_{min}, при действии которой груз начнет сдвигаться относительно тележки.



Рассмотрим силы, действующие на груз и на тележку.

На груз массы m со стороны тележки действует горизонтальная движущая сила $\overrightarrow{F_{дв.тр}}$, увлекающая груз. По вертикали на груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция тележки $\overrightarrow{\theta_m}$. На тележку по горизонтали действует внешняя сила $\vec{F}$ и сила трения $\overrightarrow{F_{тр}}$ между грузом и тележкой. По вертикали на тележку действуют сила тяжести $(M + m)\vec{g}$ и реакция поверхности $\overrightarrow{\theta_M}$.

Запишем уравнения движения груза и тележки в проекциях на горизонталь:

$$F_{дв.тр} = ma_1\ ;\ F - F_{тр} = Ma_2$$

Очевидны и следующие соотношения:

$$\left|\overrightarrow{F_{дв.тр}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{тр}}\right|;\ \theta_m = mg;\ \theta_M = (M + m)g.$$

Написанных уравнений недостаточно для нахождения ускорений, поскольку неизвестны величины сил трения. Поэтому будем исходить из того, что пока величина силы $\vec{F}$ мала и груз с тележки не сдвинется, ускорения:

$$a_1 = a_2 = a$$

Тогда:

$$F = (M + m)a;\ F_{дв.тр} = ma = \frac{mF_{max}}{M + m}$$

Максимальное значение движущей силы трения определим из соотношения:

$$F_{дв.тр}^{max} = \mu\theta_m = \mu mg$$

Максимальное значение движущей силы трения, при котором груз еще не сдвинется относительно тележки:

$$F_{дв.тр}^{max} = \mu mg = \frac{mF}{M+m},$$

Откуда:

$$F_{min} = (M+m)\mu g$$

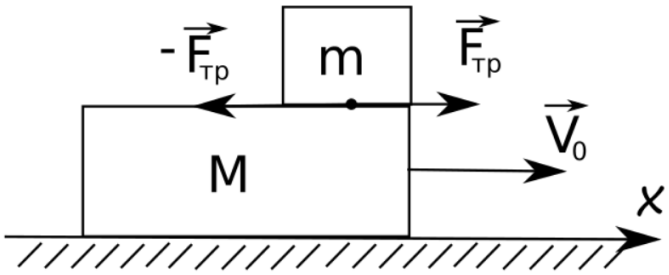
При превышении этого значения груз начнет двигаться относительно тележки.

Задача 41.

На конце доски длиной l и массой M лежит короткий брусок массой m. Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности и равен μ.

Определить, какую скорость $\vec{V}$ нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под доски?

———



Поскольку доске скорость сообщается толчком, в начальный момент времени доска покоилась относительно плоскости и скорость $\vec{V_0}$ является для нее начальной.

В горизонтальном направлении на брусок и доску действуют только силы трения скольжения: они равны по величине μmg и сообщают бруску и доске ускорения:

$$a_{бр} = \frac{\mu mg}{m} = \mu g,$$

$$a_{д} = -\frac{\mu mg}{M} = -\mu\frac{m}{M}g.$$

Таким образом, скорость бруска будет со временем увеличиваться, а скорость доски, наоборот, уменьшаться. В системе отсчета, связанной с доской, ускорение бруска запишется в виде:

$$a_{отн} = a_{бр} - a_{д} = \mu g\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Начальная скорость бруска направлена влево и равно по модулю V_0. Брусок не соскользнет с доски, если его скорость на левом конце после прохождения относительно доски расстояния l станет равной нулю.

$$V_0^2 = 2a_{отн}l = 2\mu gl\left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

Или

$$\vartheta_0 = \sqrt{2\mu gl(1 + \frac{m}{M})}$$

Брусок соскользнет с доски, то есть доска выскользнет из-под бруска, если $\vartheta > \vartheta_0$:

$$\vartheta > \sqrt{2\mu gl(1 + \frac{m}{M})}$$

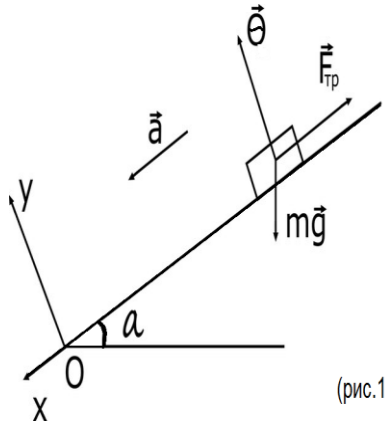
Задача 32.

Тело находится на плоскости, угол наклона которой изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

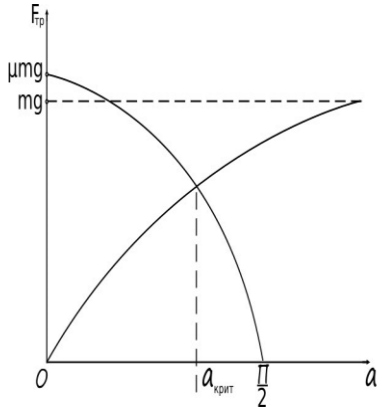
Построить график зависимости силы трения $F_{тр}$ тела о плоскость в зависимости от угла α наклона плоскости к горизонту.

Масса тела m, коэффициент трения тела о плоскость μ.

———



(рис.1)



(рис.2)

Запишем уравнение движения тела:

$$m\vec{g} + \overrightarrow{F_{тр}} + \vec{\text{?}} = m\vec{a},$$

Где $m\vec{g}$ – сила тяжести,

$\overrightarrow{F_{тр}}$ – сила трения,

$\vec{\text{?}}$ – реакция плоскости.

Спроектируем это уравнение на координатные оси:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma,$$

$$-mg\cos\alpha + \text{?} = 0,$$

А также учтем, что из определения коэффициента трения: $F_{тр}^{max} = \mu\text{?}$.

$\alpha_{крит}$ - критический угол, начиная с которого тело начнет соскальзывать с плоскости. В диапазоне значений угла $0 \le \alpha \le \alpha_{крит}$ тело неподвижно и тогда из проекции уравнения движения тела на ось X с учетом того, что $\vec{a} = 0$ получим искомую зависимость в указанном диапазоне углов:

$$F_{тр} = mg\sin\alpha.$$

В случае, когда $\alpha = \alpha_{крит}$ ускорение тела все еще равно нулю, однако сила трения достигает максимального значения $F_{тр}^{max} = \mu\theta$ и из проекций уравнений движения на координатные оси, найдем:

$$F_{тр} = mg\sin\alpha_{крит} = mg\mu\cos\alpha_{крит};$$

$$\alpha_{крит} = \mathrm{arctg}\mu.$$

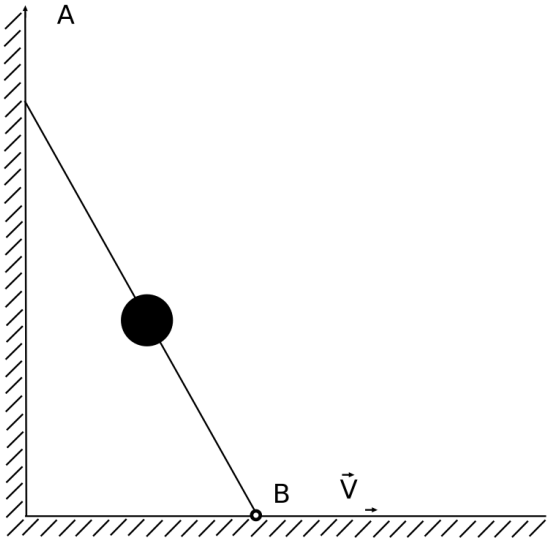
И, наконец, в случае $\alpha_{крит} < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ тело находится в движении, сила трения равна максимальной силе трения покоя $F_{тр}^{max}$ и $F_{тр} = mg\cos\alpha$

Задача 42.

По сторонам прямоугольного угла скользит жесткая палочка длиной 2l, посередине которой закреплена бусина массой m. Скорость точки B постоянна и равна $\vec{V}$.

Определить, с какой силой действует бусина на палку в тот момент, когда $\alpha = 45°$?

———



На бусину действуют:

$m\vec{g}$ – сила тяжести,

$\vec{?}$ – реакция палочки.

По 2-му закону Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{?} = m\vec{a}.$$

Из этого уравнения следует, то силу $\vec{?}$ можно найти по 3-му закону Ньютона, зная ускорение $\vec{a}$ бусины.

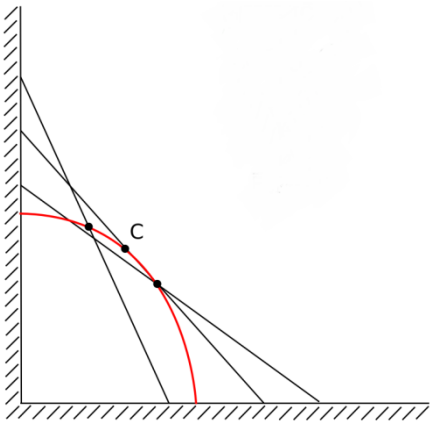
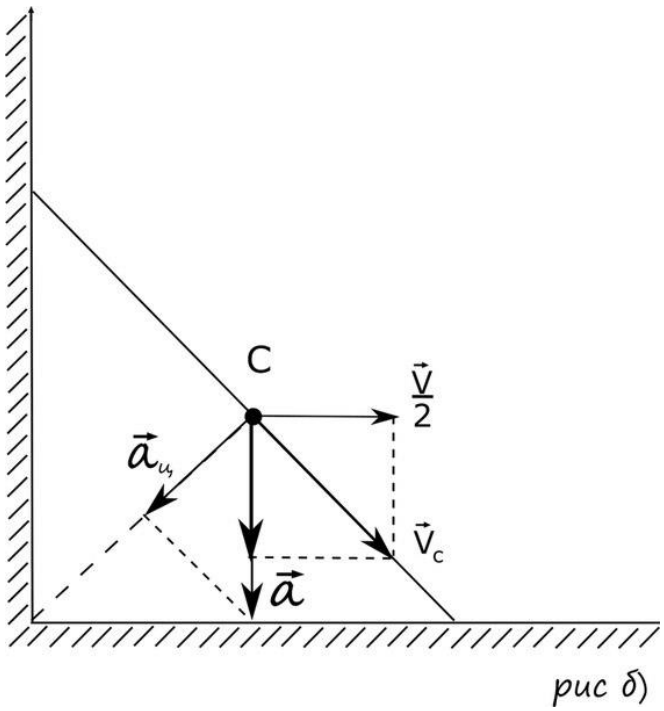


рис а)

На рисунке а) показано несколько положений палочки так как в прямоугольном треугольнике медиана, соединяющая вершину прямого угла с серединой гипотенузы, равна половине гипотенузы, бусина (точка С) находится все время на одном и том же расстоянии от вершины прямоугольника.

Таким образом, бусина движется по окружности радиусом l. Скорость V_c бусины направлена по касательной к этой окружности, а центростремительное ускорение ее равно $\frac{V_c^2}{l}$.

В любой момент времени полная скорость бусины складывается из горизонтальной и вертикальной составляющих. По условию задачи скорость точки В постоянна и равна $\vec{V}$. Горизонтальные скорости всех остальных точек тоже постоянны, причем горизонтальная скорость бусины равна $\frac{\vec{V}}{2}$. Это означает, что ускорение бусины и сила $\vec{?}$ направлены вертикально.



В тот момент времени, когда $\alpha = 45°$, скорость $\overrightarrow{V_c}$ бусины направлена вдоль палочки, а ее вертикальная и горизонтальная составляющая одинаковы по модулю и равны $\frac{V}{2}$ (рис. Б) Следовательно, полная скорость бусины в этот момент равна $\frac{V}{\sqrt{2}}$. Поэтому:

$$a_{центр} = \frac{V_c^2}{l} = \frac{V^2}{2l}, \qquad a = \sqrt{2}a_{центр} = \frac{V^2}{\sqrt{2l}}.$$

Из 2-го закона Ньютона следует, что сила, действующая на бусину в этот момент равна:

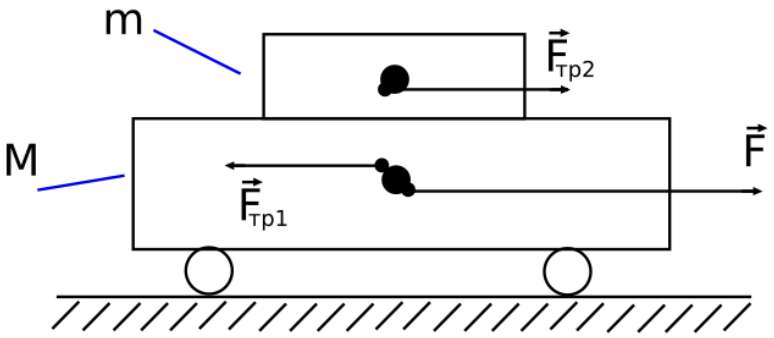
$$F_{бусины} = ▯ = mg - ma = m\left(g - \frac{V^2}{\sqrt{2l}}\right)$$

Задача 43.

Тележку массой $M = 20$ кг, на которой лежит груз массой $m = 10$ кг, тянут с силой $\vec{F}$, направленной горизонтально. Коэффициент трения между грузом и тележкой $\mu = 0{,}1$.

Пренебрегая трением между тележкой и опорой, определить ускорение тележки a_1 и груза a_2, а так же силу трения между грузом и тележкой в 2-х случаях: а) $F = 20$Н; б) $F = 60$Н.

———



Поскольку оба тела движутся горизонтально, достаточно рассмотреть лишь горизонтальные силы, так как все другие, направленные вертикально, уравновешиваются.

На тележку действуют силы: $\vec{F}$ и силы трения $\overrightarrow{F_{тр1}}$ со стороны груза, последняя направлена против скорости тележки относительно груза при трении скольжения или против силы $\vec{F}$ при трении покоя, т.е. в любом случае сила $\overrightarrow{F_{тр}}$ направлена влево. На груз действует сила трения $\overrightarrow{F_{тр2}}$ со стороны тележки, направленная по 3-му закону Ньютона вправо, причем по модулю $F_{тр1} = F_{тр2} = F_{тр}$.

Запишем для каждого тела (в проекции на направление движения)

2 закон ньютона:

$$F - F_{тр} = Ma_1 \qquad (1) \qquad\qquad F_{тр} = ma_2 \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) содержат три неизвестных. Для получения еще одного уравнения выясним характер силы трения между тележкой и грузом.

Если тележка выскальзывает из-под груза, то между ними действует сила трения скольжения, подчиняющаяся закону (2). Так как в данном случае реакция равна по модулю силе тяжести груза, имеем:

$$F_{тр} = \mu mg \qquad (3)$$

Если же тележка и груз движутся как одно целое, то между ними действует сила трения покоя $F_{покой} = \mu mg$. Однако, в этом случае выполняется условие

$$a_1 = a_2 \qquad (4)$$

Таким образом, в обоих возможных случаях получим систему из трех уравнений.

<u>Случай 1:</u> Тележка выскакивает из-под груза. Между ними действует сила трения скольжения, которая из (3) равна:

$$F_{тр} = 0{,}1 \cdot 10 \cdot 9{,}8 = 9{,}8Н.$$

<u>Случай 2:</u> Тележка и груз движутся как одно целое, удерживаемое трением покоя. Тогда $a_1 = a_2$ и система уравнений (1) и (2) запишется в виде:

$$F - F_{тр} = Ma,$$
$$F_{покой} = ma,$$

Откуда:

$$a = \frac{F}{M + m} \qquad (4)$$

$$F_{покой} = \frac{Fm}{M + m} \qquad (5)$$

Формула (5) выражает пропорциональную зависимость меду величинами F и $F_{покой}$. Однако, $F_{покой}$ имеет предел, равный уже найденной силе $F_{тр}$. Поэтому два тела будут двигаться как единое целое лишь при таких значениях силы F, при которых значения $F_{покой}$, определяемое по (5), не будет превышать ее предельного значения.

Если $F = 20Н$, то $F_{покой} = 6{,}7Н$; Если $F = 60Н$, то $F_{покой} = 20$, что невозможно поскольку предельное значение $F_{покой} = 9{,}8Н$. Это означает, что в этом случае между телами будет действовать трение скольжения.

Поэтому теперь можно легко ответить на все поставленные в задаче вопросы:

<u>1 Случай:</u> $F = 20Н$, между телами действует сила трения покоя $F_{покой} = 6{,}7Н$. Из (4) найдем и ускорение $a = 0{,}67\frac{м}{с^2}$.

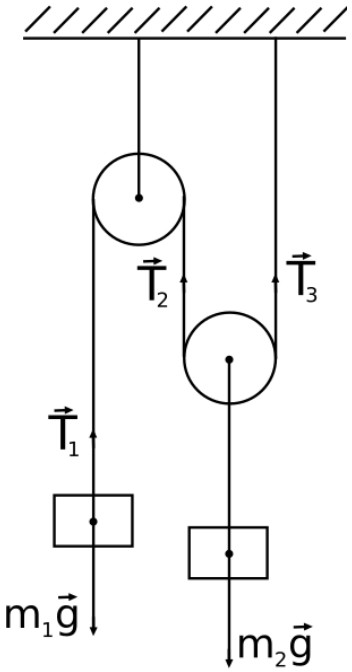
<u>2 Случай:</u> $F = 60Н$, между телами действует сила трения скольжения $F_{тр} = 9{,}8Н$. Из (1) и (2) находим ускорения тел $a_1 = 2{,}51\frac{м}{с^2}, a_2 = 9{,}8\frac{м}{с^2}$.

Задача 44.

Определить ускорения a_1 и a_2, с которыми движутся грузы массами m_1 и m_2 в установке, изображенной на рисунке.

Определить также силу натяжения $\vec{T}$ нити, которую считать невесомой и нерастяжимой. Трением и массой блоков пренебречь.

———



1.На груз массой m_1 действуют силы:

$m_1\vec{g}$ – сила тяжести,

$\overrightarrow{T_1}$ – сила натяжения нити.

На груз массой m_2 действуют силы:

$m_2\vec{g}$ – сила тяжести,

$\overrightarrow{T_2}$ – сила натяжения нити.

Если тела связать нитью, массой которой можно пренебречь, то силу натяжения нити надо считать одинаковой по всей длине нити. Действительно, предположив, что на участок нити длиной в Δl действуют со стороны соседних нитей силы $\overrightarrow{T_1}$ и $\overrightarrow{T_2}$, но по 2 закону Ньютона:

$$T_1 - T_2 = \Delta ma,$$

Где Δm – масса рассматриваемого участка нити.

Полагая, что $\Delta m = 0$, имеем: $T_1 = T_2$

Если нить перекинута через блок, то равенство $T_1 = T_2$ будет верным лишь в случае, когда можно пренебречь массами нити и блока, а также силами трения, возникающими при вращении блока.

Таким образом, в нашем случае:

$$T_1 = T_2 = T.$$

2.Запишем 2-ой закон Ньютона для каждого движущегося тела (в проекциях на вертикаль):

$$m_1g - T = m_1a_1,$$

$$m_2g - 2T = -m_2a_2.$$

3.Поскольку нить нерастяжима, то для модулей перемещения грузов за одинаковое время имеем:

$$S_1 = 2S_2, \text{ откуда: } a_1 = 2a_2$$

4.Совместное решение этих уравнений дает ответы:

$$a_1 = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2}g$$

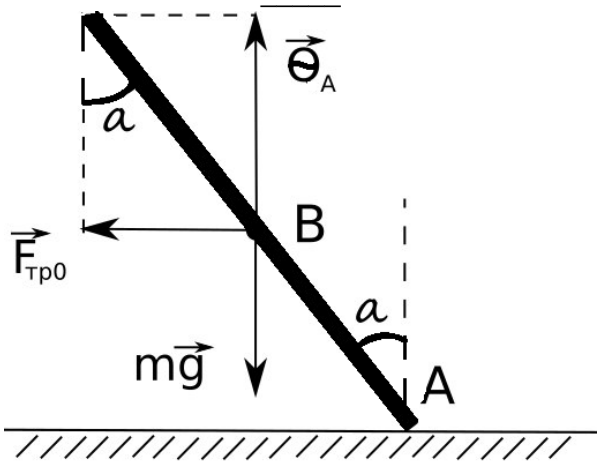
$$a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}g$$

$$T = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2}g$$

Отсюда следует: 1) Если $2m_1 > m_2$, то $a_1 > 0, a_2 > 0$, т.е. грузы движутся вниз, что нами и было предположено; 2) Если $2m_1 = m_2$, то $a_1 = 0, a_2 = 0$, т.е. грузы находятся в покое, или движутся равномерно; 3) Если $2m_1 < m_2$, то $a_1 < 0, a_2 < 0$. Это соответствует тому, что ускорение груза m_1 направлено вверх, а груза m_2 вниз.

Задача 45.

Мотоциклист едет по шоссе со скоростью $\vec{V}$. Полагая, что коэффициент трения колес равен μ, определить минимальное время t_{min}, за которое он может развернуться, не снижая скорости. Найти минимальную ширину d_{min} шоссе для такого разворота.



Для разворота мотоциклист должен наклониться на угол α к вертикали, поэтому необходимо изменить направление вектора скорости $\vec{V}$, величина которой, по условию, неизменна. Для этого нужно к мотоциклу приложить центростремительную силу, направленную по радиусу кривизны траектории к ее центру.

Такой силой может быть только сила трения покоя $\overrightarrow{F_{тр0}}$.

Приложим результирующую силу $\vec{?}$, действующую на мотоцикл со стороны дороги, силу $\overrightarrow{F_{тр0}}$, его вес $m\vec{g}$ и реакцию опоры $\overrightarrow{?_A}$ к центру масс (точка B).

Силы $\overrightarrow{?_A}$ и $m\vec{g}$ одинаковы по величине и направлены противоположно:

$$?_A = mg$$

При неизменном модуле скорости $\vec{V}$ постоянные значения будут иметь сила трения покоя $\overrightarrow{F_{тр0}}$ и угол α наклона мотоциклиста.

Будем считать, что сила трения покоя $\overrightarrow{F_{тр0}}$ достигает своего максимального значения:

$$\overrightarrow{F_{тр0}} = F_{тр}^{max} = \mu ?_A = \mu mg$$

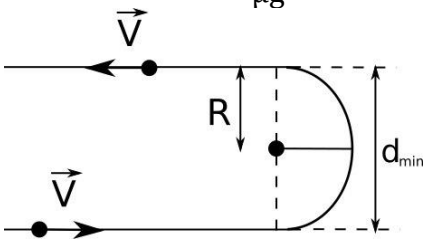
По 2-му закону Ньютона:

$$\mu mg = \frac{mV^2}{R}, \text{ откуда } R = \frac{V^2}{\mu g}$$

Где R – радиус кривизны траектории мотоциклиста.

Ширина дороги d_{min}должна быть не меньше двух радиусов кривизны траектории:

$$d_{min} \geq 2R = \frac{2V^2}{\mu g}$$



Время разворота мотоцикла определим из выражения:

$$t_{min} = \frac{d_{min}}{V} = \frac{\pi R}{V} = \frac{\pi V}{\mu g},$$

Где πR – длина полуокружности радиуса R.